Hohlleitungsmeßverfahren für das Frequenzverhalten des Permeabilitätstensors von magnetisierten Mikrowellenferriten

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
der Ruhr-Universität Bochum

von

Michael Hoffmann

Belgard

Bochum 1975

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546503_0022

Hohlleitungsmeßverfahren für das Frequenzverhalten des Permeabilitätstensors von magnetisierten Mikrowellenferriten

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
der Ruhr-Universität Bochum

von

Michael Hoffmann

Belgard

Bochum 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am: 28.5.1975
Tag der mündlichen Prüfung: 9.7.1975
Referent: Prof. Dr. H. Severin
Korreferent: Dr. F. Haberey

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1. Einleitung		1
2. Geeignete Leitungsstrukturen		3
2.1	Vorbemerkungen	3
2.1.1	Ferritplatte parallel zur Schmalseite einer Rechteckhohlleitung	5
2.1.2	Sprunghafter Übergang auf ferritgefüllte Hohlleitung kleinerer Breite	9
3. Mathematischer Teil		10
3.1	Entwicklung nach Eigenfunktionen	10
3.2	Eigenwellen der Hohlleitung mit Ferriteinsatz	11
3.3	Orthogonalitätsbeziehungen für Hohlleitungen mit Ferrit	15
3.4	Berechnung der Streumatrizen	18
3.4.1	Beschreibung durch verallgemeinerte Streumatrix	18
3.4.2	Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen	21
3.4.3	Entwicklung nach den Eigenfunktionen der leeren Hohlleitung	23
3.4.4	Entwicklung nach den Eigenfunktionen der belasteten Hohlleitung	26
3.4.5	Gemischte Entwicklungen	29
3.5	Ergebnisse und Diskussion der Rechnung	32
3.5.1	Konvergenz der Entwicklungen	32
3.5.2	Numerische Stabilität	33
3.5.3	Allgemeine Kriterien für verlustfreie Materialeinsätze	35
3.5.4	Allgemeine Kriterien für verlustbehaftete Materialeinsätze	37

Seite

3.5.5 Die Erfüllung der Kantenbedingung 38

3.6 Bestimmung der Materialdaten über die Streumatrix 44

4. Experimenteller Teil 47

4.1 Meßapparatur und Meßvorgang 47

4.2 Meßgenauigkeit 50

4.3 Meßergebnisse 54

5. Zusammenfassung 58

Literaturverzeichnis

Liste häufig verwendeter Formelzeichen

Tabellen

1. Einleitung

Der Zusammenhang zwischen Wechselinduktion und magnetischer Wechselfeldstärke in magnetisierten Ferriten wird durch einen μ-Tensor beschrieben. Die Abhängigkeit der Komponenten dieses Tensors von der magnetischen Gleichfeldstärke und der Frequenz kann mit Hilfe der Bewegungsgleichung des Magnetisierungsvektors, der unter dem Einfluß des hochfrequenten Magnetfeldes eine Präzession um die Richtung des Gleichfeldes ausführt, berechnet werden. Diese Modellvorstellung liefert jedoch nur den qualitativen Verlauf der Komponenten, so daß diese für den Entwurf von Mikrowellenbauteilen, aber auch für die Festkörperphysik interessanten Größen z.Zt. nur durch Messungen genau ermittelt werden können.

Die bisher bei der Messung des μ-Tensors im Mikrowellenbereich angewandten Verfahren sind für frequenzabhängige Messungen nur wenig geeignet. Bei den üblichen Meßverfahren [1,2,3] werden durch Einbringen einer kleinen Ferritprobe in das zirkular polarisierte Magnetfeld eines geeigneten Hohlraumresonators dessen Eigenfrequenz und Güte verändert. Aus diesen Größen können mit Hilfe der Störungsrechnung die Eigenwerte des μ-Tensors und damit die Materialdaten bestimmt werden. Da der Resonator die Meßfrequenz festlegt, ist dieses Verfahren insbesondere zur Untersuchung der Abhängigkeit der Tensorkomponenten von der Gleichfeldstärke geeignet. Außerdem werden Probenhalterung und dielektrische Eigenschaften des Ferrits von der Störungsrechnung nicht erfaßt und können bei der Auswertung nur schwer berücksichtigt werden.

Ein weiteres Verfahren ist die Messung von Ausbreitungskonstanten der rechts- bzw. linksdrehenden HE_{11}-Wellen in einer Rundhohlleitung mit axial magnetisiertem Ferritstab und die Berechnung des μ-Tensors über die Eigenwertgleichung einer solchen Struktur [4]. Da sich drehende Wellen nur in einem schmalen Frequenzbereich mit der erforderlichen Genauigkeit erzeugen lassen, ist auch dieses Verfahren nicht ohne weiteres für Messungen der

Frequenzabhängigkeit geeignet. Außerdem müssen, um Störungen höherer, an den Stabspitzen angeregter Wellentypen auszumitteln, zur Bestimmung einer einzigen Ausbreitungskonstante viele Messungen gemacht werden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist, ein auch für frequenzabhängige Messungen geeignetes Verfahren zu entwickeln, welches die folgenden Bedingungen erfüllt: Die Hohlleitungsstruktur mit dem Ferrit muß einer feldtheoretischen Behandlung zugänglich sein, welche den Zusammenhang zwischen den Materialparametern und den üblichen Meßgrößen der Mikrowellentechnik liefert. Die Meßanordnung soll über das ganze Frequenzband der jeweils verwendeten Hohlleitung betrieben werden können; die Auswertung schließlich sollte nicht zuviel zeitlichen Aufwand erfordern.

2. Geeignete Leitungsstrukturen

2.1 Vorbemerkungen

Das magnetische Wechselfeld $\vec{H}_{\sim}$ und die Wechselinduktion $\vec{B}_{\sim}$ innerhalb eines magnetisierten Ferrits sind durch einen Permeabilitätstensor miteinander verknüpft. Mit dem magnetisierenden Gleichfeld $\vec{H}_o = \vec{u}_y H_o$ und bei Wechselfeldern der Zeitabhängigkeit wie $\vec{H}_{\sim} = \vec{H} \exp(j\omega t)$ ergibt sich in einem karteischen Koordinatensystem der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \mu_o \begin{pmatrix} \mu & 0 & -j\varkappa \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 \\ j\varkappa & 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} . \qquad (2.1)$$

Für einen zur Sättigung magnetisierten Ferrit ist $\mu_{\parallel} = 1$. Da die Komponenten des Tensors im allgemeinen komplex sind, werden dann vier reelle Größen zur Beschreibung eines solchen Ferrits benötigt.

Zu den Eigenwerten

$$\mu_+ = \mu + \varkappa, \qquad \mu_- = \mu - \varkappa \qquad (2.2)$$

des μ-Tensors gehören die Eigenvektoren

$$\frac{\vec{H}_+}{|\vec{H}_+|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ j \end{pmatrix}, \qquad \frac{\vec{H}_-}{|\vec{H}_-|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -j \end{pmatrix},$$

die in Bezug auf die Richtung von $\vec{H}_o$ rechts- bzw. linkszirkular polarisierte magnetische Felder darstellen. Eine Umpolung des Gleichfeldes $\vec{H}_o$ bewirkt das gleiche wie der Übergang von rechts- auf linkszirkular polarisierte Felder, nämlich eine Vertauschung der Eigenwerte μ_+ und μ_-. Es liegt nahe, die Eigenwerte μ_+ und μ_- in Strukturen zu messen, die eine Anregung des Ferrits mit zirku-

lar polarisierten magnetischen Feldern ermöglichen. Die üblichen Meßverfahren beruhen auf diesem Grundgedanken [1,2,3,4].

Für frequenzabhängige Messungen ergibt sich die experimentelle Schwierigkeit, ein zirkular polarisiertes magnetisches Mikrowellenfeld über ein breites Frequenzband zu erzeugen. Es ist indessen auch möglich, die Messung mit elliptisch polarisierten Feldern vorzunehmen, wenn der Grad der Elliptizität genau bekannt ist oder bei der Auswertung nicht explizit berücksichtigt werden braucht.

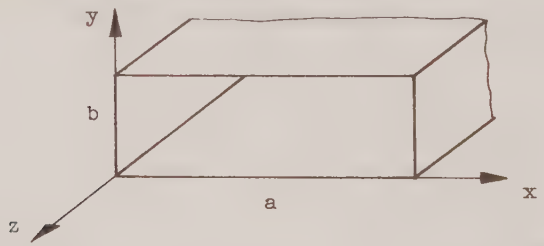
Die einfachste Mikrowellenleitung, bei der elliptisch polarisierte magnetische Felder auftreten, ist die mit einer fortschreitenden H_{10}-Welle betriebene Rechteckhohlleitung. Für das Verhältnis von transversaler zu longitudinaler magnetischer Feldstärke in einer solchen Leitung der Breite a gilt bei der Kreisfrequenz ω

$$\frac{H_x}{H_z} = jk_z \frac{a}{\pi} \tan \frac{\pi x}{a} , \tag{2.3}$$

wobei

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_g} \tag{2.4}$$

die Wellenzahl der leeren Hohlleitung ist.



In den Ebenen x = const parallel zur Schmalseite der leeren Hohlleitung sind also alle Grade elliptischer, einschließlich linearer und zirkularer Polarisation realisierbar. Im folgenden werden zwei Strukturen ausgewählt, die durch ihre einfache

Geometrie einer nicht zu komplizierten mathematischen Beschreibung zugänglich sind.

2.1.1 Ferritplatte parallel zur Schmalseite einer Rechteckhohlleitung

Die Wände der Rechteckhohlleitung (Abb. 1) werden vollkommen leitend ($\sigma \to \infty$) angenommen. Wird die Ferritplatte als homogen und von einem magnetischen Gleichfeld $\vec{H}_o = \vec{u}_y H_o$ homogen magnetisiert vorausgesetzt, so gelten im Ferrit

$$\vec{D} = \epsilon_o \epsilon_r \vec{E} \tag{2.4a}$$

und

$$\vec{B} = \mu_o \overleftrightarrow{\mu}_r \vec{H}, \tag{2.4b}$$

wobei der Permeabilitätstensor $\overleftrightarrow{\mu}_r$ durch Gl. (2.1) gegeben ist. Die Anordnung ist dann von der y-Koordinate unabhängig, so daß mit $\partial/\partial y \equiv 0$ nur die Feldkomponenten E_y, H_x und H_z existieren, die über die Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} j\omega\epsilon_o\epsilon_r E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= j\omega\mu_o\mu H_x + \omega\mu_o\varkappa H_z\,, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \omega\mu_o\varkappa H_x - j\omega\mu_o\mu H_z \end{aligned} \tag{2.5a-c}$$

im Ferrit und

$$\begin{aligned} j\omega\epsilon_o E_y &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= j\omega\mu_o H_x\,, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -j\omega\mu_o H_z \end{aligned} \tag{2.5d-f}$$

im Vakuum verknüpft sind.

Zunächst soll die unendlich lange Struktur ($l \to \infty$) behandelt werden. Dabei wird die Ortsabhängigkeit der Feldvektoren von der z-Koordinate durch $\exp(-\gamma z)$ beschrieben. Die Erfüllung von Rand- und Stetigkeitsbedingungen führt zu einem homogenen Gleichungssystem, dessen Determinante durch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\mu_\perp^2 + \frac{\gamma^2}{p^2}\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\cos\left(p(a-\delta-2d)\right) + \\
&\frac{1}{2}\left(\mu_\perp^2 - \frac{\gamma^2}{p^2}\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\cos\left(p(a-\delta)\right) - \\
&- j\mu_\perp \frac{\gamma}{p}\frac{\varkappa}{\mu}\sin\left(p(a-\delta-2d)\right) + \\
&\mu_\perp \frac{q}{p}\cot(q\delta)\sin\left(p(a-\delta)\right) \;=\; f(\gamma)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mu_\perp &= \frac{\mu^2 - \varkappa^2}{\mu} \\
p^2 &= k_o^2 + \gamma^2 \\
q^2 &= k_o^2 \epsilon_r \mu_\perp + \gamma^2 \\
k_o^2 &= \omega^2 \epsilon_o \mu_o
\end{aligned} \tag{2.7a-d}$$

gegeben ist [5]. Notwendige Bedingung für nichttriviale Lösungen dieses homogenen Gleichungssystems ist $f(\gamma) = 0$. Die sich daraus ergebenden unendlich vielen Lösungen sind die Ausbreitungskonstanten γ_n von Eigenwellen, die entsprechend den oben gemachten Voraussetzungen zur Klasse der H_{no}-Wellen gehören. Im Grenzfall der Plattendicke $\delta = 0$ ergeben sich als Lösungen von Gl. (2.6) die Wellenzahlen k_{zn} der leeren Hohlleitung ($\gamma_n \to jk_{zn}$). Entwickelt man Gl. (2.6) um diese Lösungen in eine Taylor-Reihe

nach Potenzen von δ und bricht nach dem ersten Glied ab, so ergibt sich als Näherung für sehr dünne Platten [6]:

$$\gamma_n = jk_{zn}\Big\{1 + \Big(\frac{\delta}{a}\Big)(\varepsilon_r - 1)\Big(\frac{k_o}{k_{zn}}\Big)^2 \sin^2(k_{xn}d) +$$

$$+\Big(\frac{\delta}{a}\Big)\Big(\frac{k_{xn}}{k_{zn}}\Big)^2 \cos^2(k_{xn}d)\Big[(\mu_\perp - 1) + \frac{\mu-1}{\mu}\Big(\frac{k_{zn}}{k_{xn}}\Big)^2 \tan^2(k_{xn}d) - \qquad (2.8)$$

$$- 2\,\frac{\varkappa}{\mu}\Big(\frac{k_{zn}}{k_{xn}}\Big)\tan(k_{xn}d)\Big]\Big\}$$

mit

$$k_{xn} = \frac{n\pi}{a} .$$

In derselben Näherung liegen die Stellen rechts- und linkszirkular polarisierten Magnetfeldes bei den aus

$$-(\mu+\varkappa) = \frac{k_{zn}}{k_{xn}} \tan(k_{xn}\bar{x}_r) \qquad (2.9a)$$

und

$$(\mu-\varkappa) = \frac{k_{zn}}{k_{xn}} \tan(k_{xn}\bar{x}_l) \qquad (2.9b)$$

folgenden Werten $\bar{x}_r$, $\bar{x}_l$.[1] Dabei ist zu beachten, daß nur für den Fall der Verlustfreiheit des Ferrits (μ,$\varkappa$ reell) solche Positionen existieren. Befindet sich dann die dünne Ferritplatte an diesen ausgezeichneten Stellen, so vereinfacht sich Gl. (2.8) durch Einsetzen von Gl. (2.9) zu

$$\gamma_n = jk_{zn}\Big\{1 + \Big(\frac{\delta}{a}\Big)(\varepsilon_r - 1)\Big(\frac{k_o}{k_{zn}}\Big)^2 \sin^2(k_{xn}\bar{x}_{r,l}) +$$

$$+ \Big(\frac{\delta}{a}\Big)\Big(\frac{k_{xn}}{k_{zn}}\Big)^2 \cos^2(k_{xn}\bar{x}_{r,l})\Big[-1 + \mu_\pm^2\Big] , \qquad (2.10)$$

wobei μ_+ zu $\bar{x}_r$ und μ_- zu $\bar{x}_l$ gehören.

---

1) Siehe Gl. (3.64)

Die unendlich vielen, als Lösungen von Gl. (2.6) resultierenden Ausbreitungskonstanten

$$\gamma_n = \alpha_n + j\beta_n$$

gehören zu Wellen, die in +z- und -z-Richtung laufen. Wegen des in γ linearen Terms der Gl.(2.6) gibt es im allgemeinen keine zwei Wellen, deren Ausbreitungskonstanten sich lediglich durch das Vorzeichen unterscheiden. Daher ist die Struktur nichtreziprok. Bei Kenntnis von zwei Ausbreitungskonstanten ergeben sich aus Gl. (2.6) zwei komplexe linear unabhängige Gleichungen, mit denen eine eindeutige Bestimmung der Materialdaten μ und $\varkappa$ des Ferrits möglich ist. Ausnahmen bilden die reziproken Strukturen der mit Ferrit gefüllten Hohlleitung und der sehr dünnen Platte an der Hohlleitungswand. In diesen Fällen sind die Ausbreitungskonstanten nach Gl. (2.6) und Gl. (2.8) nur von $\mu_\perp$ abhängig, so daß eine Bestimmung von μ und $\varkappa$ nicht möglich ist.

Besonders einfach ist der Zusammenhang zwischen Materialdaten und Ausbreitungskonstanten für die durch Gl. (2.10) beschriebenen Fälle, weil dann nur die Eigenwerte μ_+ oder μ_- des Permeabilitätstensors in die Ausbreitungskonstanten eingehen. Allerdings sind diese beiden Fälle ohne praktische Bedeutung, da die magnetischen Verluste des Ferrits nur außerhalb der Resonanz vernachlässigbar sind, und die Position der Platte nach Gl. (2.9) von den Meßwerten selbst abhängt.

Der Gültigkeitsbereich von Gl. (2.8), der sich nach numerischer Lösung von Gl. (2.6) angeben läßt, ist sehr klein und zudem von den Materialdaten und der Anordnung des Ferriteinsatzes abhängig (Abb. 2). Außerdem sind Ferritplatten, deren Dicke $\delta \leq 0{,}1$ mm noch eine Auswertung nach Gl. (2.8) zuläßt, in einer für die Messung ausreichenden Länge $l > 50$ mm für eine X-Band-Hohlleitung (Höhe 10,16 mm) praktisch nicht mehr herstellbar.

Die Messung der Ausbreitungskonstanten muß daher an dickeren Ferriteinsätzen erfolgen, und zur Auswertung die exakte Gl. (2.6) herangezogen werden. Dabei muß sichergestellt sein, daß im Bereich

der Meßsonden (s. Abb. 3) nur ein Wellentyp vorhanden ist. Hierfür bietet sich die vor- und rücklaufende Grundwelle an. An den Übergangsstellen z = 0 und z = l zur leeren Hohlleitung entstehen Wellentypen höherer Ordnung, die die Messung verfalschen würden und daher im Bereich der Meßstrecke abgeklungen sein müssen. Dadurch wird einerseits die Dicke δ der Ferritplatte und andererseits die effektiv nutzbare Länge $l_{eff} < l$ der Meßstrecke begrenzt. Bei der Durchführung der Messungen mit einem Aufbau nach Abb. 3 zeigte sich, daß der Einfluß von Wellentypen höherer Ordnung bei Variation von μ und $\varkappa$ durch das magnetische Gleichfeld nicht immer zu vernachlässigen war. Um die hier beschriebene Struktur für Meßzwecke einsetzen zu können, müssen daher auch die an den Stoßstellen angeregten Wellentypen höherer Ordnung berücksichtigt werden, d.h. die Auswertung kann nicht über die Ausbreitungskonstanten, sondern muß über die Streumatrix der Struktur erfolgen.

2.1.2 Sprunghafter Übergang auf ferritgefüllte Hohlleitung kleinerer Breite

Zwischen zwei leere Hohlleitungen der Breite a ist eine mit Ferrit gefüllte Hohlleitung von gleicher Höhe aber kleinerer Breite δ und Länge l eingefügt (Abb. 4). Die metallischen Wände seien wieder ideal leitend und der Ferrit homogen magnetisiert. Die Ausbreitungskonstanten des ferritgefüllten Teils ergeben sich aus Gl. (2.6) zu

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\delta}\right)^2 - k_o^2 \varepsilon_r \mu_\perp} \qquad n = 1,2,3, \ldots \quad . \qquad (2.12)$$

Bei unsymmetrischer Anordnung des ferritgefüllten Leitungsstücks ist die Gesamtstruktur wiederum nichtreziprok, was sich durch die dann für die beiden Ausbreitungsrichtungen ungleiche Anregung des ferritgefüllten Teils an den Stoßstellen z = 0 und z = l erklärt. Auch hier muß daher den Wellentypen höherer Ordnung bei der mathematischen Beschreibung Rechnung getragen werden und die Auswertung über die Streumatrix erfolgen.

3. Mathematischer Teil

3.1 Entwicklung nach Eigenfunktionen

Werden die beiden Strukturen nach Abb. 1 und Abb. 4, deren Geometrie entsprechend den Voraussetzungen von Abschnitt 2 nicht von der y-Koordinate abhängen soll, von Wellentypen angeregt, für deren Felder ebenfalls $\partial/\partial y \equiv 0$ gilt, so entstehen an den Stoßstellen Felder, die wiederum von y unabhängig sind. In einer Rechteckhohlleitung erfüllen nur die H_{no}-Wellentypen diese Bedingung, und das hier vorliegende Problem kann mit diesen allein gelöst werden. Die Methode der Entwicklung nach Eigenfunktionen erlaubt für beide Strukturen eine weitgehend gleiche Vorgehensweise und unterliegt keinen Einschränkungen wie Reziprozität und Verlustfreiheit der Strukturen [7,8]. Voraussetzung für die Anwendung dieses Verfahrens ist, daß die Eigenfunktionen, nach denen die transversalen Felder in den Grenzflächen entwickelt werden sollen, ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Die Eigenfunktionen einer leeren Rechteckhohlleitung erfüllen bekanntlich diese Voraussetzungen [9]. Die Entwicklung ist eine Fourierreihe mit sin-Gliedern. Auch die Eigenwellen einer Hohlleitung mit Ferriteinsatz stellen, wie in [10] und [11] gezeigt wird, ein geeignetes System dar. Damit ergeben sich mehrere Möglichkeiten der mathematischen Formulierung des Problems.

Von entscheidender Bedeutung ist in jedem Fall, die ersten N Eigenfunktionen lückenlos zu berücksichtigen. Bei den Eigenfunktionen der leeren Hohlleitung ist dies gleichbedeutend mit der Mitnahme der ersten N Fourierkoeffizienten und stellt kein Problem dar, da die Eigenwerte $k_{xn} = n\pi/a$ und damit die Wellenzahlen

$$k_{zn} = \sqrt{k_o^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \tag{3.1}$$

vollständig und in der richtigen Reihenfolge angegeben werden können. Das gilt nach Gl. (2.12) auch, wenn der Leitungsquerschnitt mit Ferrit ausgefüllt ist. Für die Hohlleitung mit Ferriteinsatz

ergeben sich zwei Probleme:

Erstens ist die transzendente Gleichung (2.6) für die Ausbreitungskonstanten γ_n nicht geschlossen lösbar und es besteht daher die Gefahr, daß eine benötigte Lösung nicht gefunden wird. Zweitens ist die Einordnung der γ_n für den verlustbehafteten Fall schwieriger, da es bei komplexen γ_n keine scharfe Grenze zwischen ausbreitungsfähigen Wellen und aperiodischen Feldern gibt. Die Einordnung kann analog dem Fall eines isotropen verlustfreien Stoffeinsatzes erfolgen, bei dem die entweder reellen oder imaginären Ausbreitungskonstanten γ_n so geordnet werden, daß

$$\gamma_1^2 < \gamma_2^2 < \gamma_3^2 < \gamma_4^2 < \ldots \quad . \tag{3.2a}$$

Beim verlustbehafteten Ferrit werden die Ausbreitungskonstanten entsprechend nach

$$\mathrm{Re}\{\gamma_1^2\} < \mathrm{Re}\{\gamma_2^2\} < \mathrm{Re}\{\gamma_3^2\} < \ldots \tag{3.2b}$$

geordnet. Dies stimmt, wie sich später zeigen wird, im wesentlichen mit einer Ordnung nach den in den Eigenfunktionen überwiegend auftretenden Raumharmonischen überein. Darüber hinaus können die Wellen bezüglich der z-Richtung in vor- und rücklaufende aufgeteilt werden. Dies geschieht im Falle eines verlustfreien Einsatzes bei den ausbreitungsfähigen Wellen ($\alpha_n = 0$) nach dem Vorzeichen der Phasenkonstanten ($\beta_n > 0$ vor-, $\beta_n < 0$ rücklaufend). In allen anderen Fällen werden die Wellen, ohne Rücksicht auf ihre Phasenkonstante, nach dem Vorzeichen ihrer Dämpfungskonstante, für $\alpha_n > 0$ den vor- und für $\alpha_n < 0$ den rücklaufenden Wellen zugeordnet, da sie in +z- oder in -z-Richtung abklingen.

3.2 Eigenwellen der Hohlleitung mit Ferriteinsatz

Für die unendlich lange Hohlleitung mit Ferriteinsatz ist die Lösung der Eigenwertaufgabe bekannt [5] und soll hier nur soweit

referiert werden, wie es für das weitere Vorgehen nötig ist. In den drei transversalen Teilbereichen der Hohlleitung entsprechend Abb.1 ($1 \to \infty$) werden für das Feld der H_{no}-Wellen folgende Ansätze gemacht:

Für $-d-\frac{\delta}{2} \le x \le -\frac{\delta}{2}$

$$\vec{E}_n = \vec{u}_y E_n^{(1)} \sin p_n\left(x+d+\frac{\delta}{2}\right) e^{-\gamma_n z} ,$$

$$\vec{H}_n = E_n^{(1)}\left\{\vec{u}_x \frac{j\gamma_n}{\omega\mu_o} \sin p_n\left(x+d+\frac{\delta}{2}\right) + \right. \tag{3.3a,b}$$

$$\left. + \vec{u}_z \frac{jp_n}{\omega\mu_o} \cos p_n\left(x+d+\frac{\delta}{2}\right)\right\} e^{-\gamma_n z} ,$$

für $-\frac{\delta}{2} \le x \le \frac{\delta}{2}$

$$\vec{E}_n = \vec{u}_y\left(E_n^{(2)} \sin q_n x + E_n^{(3)} \cos q_n x\right) e^{-\gamma_n z} ,$$

$$\vec{H}_n = \vec{u}_x\left\{\frac{j\gamma_n}{\omega\mu_o\mu_\perp}\left(E_n^{(2)} \sin q_n x + E_n^{(3)} \cos q_n x\right) - \right.$$

$$- \frac{\varkappa q_n}{\omega\mu_o\mu\mu_\perp}\left.\left(E_n^{(2)} \cos q_n x - E_n^{(3)} \sin q_n x\right)\right\} e^{-\gamma_n z} + \tag{3.4a,b}$$

$$+ \vec{u}_z\left\{\frac{\varkappa\gamma_n}{\omega\mu_o\mu\mu_\perp}\left(E_n^{(2)} \sin q_n x + E_n^{(3)} \cos q_n x\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{jq_n}{\omega\mu_o\mu_\perp}\left(E_n^{(2)} \cos q_n x - E_n^{(3)} \sin q_n x\right)\right\} e^{-\gamma_n z}$$

und für $\frac{\delta}{2} \le x \le a-d-\frac{\delta}{2}$

$$\vec{E}_n = \vec{u}_y E_n^{(4)} \sin p_n\left(a-d-\frac{\delta}{2}-x\right) e^{-\gamma_n z} ,$$

$$\vec{H}_n = E_n^{(4)}\left\{\vec{u}_x \frac{j\gamma_n}{\omega\mu_o} \sin p_n\left(a-d-\frac{\delta}{2}-x\right) - \right. \tag{3.5a,b}$$

$$\left. - \vec{u}_z \frac{jp_n}{\omega\mu_o} \cos p_n\left(a-d-\frac{\delta}{2}-x\right)\right\} e^{-\gamma_n z} .$$

Diese Ansätze erfüllen bereits die Randbedingungen an den Hohlleitungswänden und mit den Separationsgleichungen

$$k_o^2 = p_n^2 - \gamma_n^2$$

$$k_o^2 \varepsilon_r \mu_\perp = q_n^2 - \gamma_n^2 \qquad (3.6a,b)$$

auch die Maxwellschen Gleichungen (2.5). Die Stetigkeitsbedingungen für E_y und H_z an den Stellen $x = \pm \delta/2$ ergeben homogene Gleichungssysteme der Form

$$\begin{pmatrix} \sin p_n d & \sin q_n \frac{\delta}{2} & -\cos q_n \frac{\delta}{2} & 0 \\ -\mu_\perp p_n \cos p_n d & j\frac{\varkappa}{\mu}\gamma_n \sin q_n \frac{\delta}{2} + q_n \cos q_n \frac{\delta}{2} & -j\frac{\varkappa}{\mu}\gamma_n \cos q_n \frac{\delta}{2} + q_n \sin q_n \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & \sin q_n \frac{\delta}{2} & \cos q_n \frac{\delta}{2} & -\sin p_n(a-d-\delta) \\ 0 & -j\frac{\varkappa}{\mu}\gamma_n \sin q_n \frac{\delta}{2} + q_n \cos q_n \frac{\delta}{2} & -j\frac{\varkappa}{\mu}\gamma_n \cos q_n \frac{\delta}{2} - q_n \sin q_n \frac{\delta}{2} & \mu_\perp p_n \cos p_n(a-d-\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n^{(1)} \\ E_n^{(2)} \\ E_n^{(3)} \\ E_n^{(4)} \end{pmatrix} = (0) \qquad (3.7)$$

Mit den aus Gln. (2.6), (2.7b) und (2.7c) folgenden Werten von γ_n, p_n und q_n erhält man die zugehörigen Eigenfunktionen als nichttriviale Lösungen des Gleichungssystems (3.7). Die transversalen Feldkomponenten, die sich infolge der Nichtreziprozität der Anordnung für hin- und rücklaufende Wellen unterscheiden, lassen sich dann in der Form

$$E_{yn}^{v} = \overline{A}_n \, e_n^v(x) e^{-\gamma_n^v z} = A_n(z) e_n^v(x)$$

$$H_{xm}^{v} = \overline{A}_n \, h_n^v(x) e^{-\gamma_n^v z} = A_n(z) h_n^v(x) \qquad (3.8a,b)$$

und

$$E_{yn}^{r} = \overline{B}_n \, e_n^r(x) e^{-\gamma_n^r z} = B_n(z) e_n^r(x)$$

$$H_{xn}^{r} = \overline{B}_n \, h_n^r(x) e^{-\gamma_n^r z} = B_n(z) h_n^r(x) \qquad (3.8c,d)$$

schreiben.

Um tatsächlich die ersten N Eigenwellen zu finden, ist bei der numerischen Lösung der transzendenten Gleichung (2.6) einiger Aufwand erforderlich[1]. Zunächst werden für eine extrem dünne Ferritplatte ($\delta/a < 0{,}0025$) Näherungslösungen der Ausbreitungskonstanten nach Gl. (2.8) berechnet. Mit diesen Anfangswerten wird die Gl. (2.6) nach der Newton-Methode [12] bei unveränderter Geometrie iterativ gelöst. Die Iteration wird abgebrochen, wenn die relative Änderung der Ausbreitungskonstanten dem Betrage nach kleiner als $0{,}5 \cdot 10^{-7}$ ist. Dann wird die Plattendicke sukzessiv nach folgendem Algorithmus bis zur vorgegebenen Dicke δ vergrößert: Die zu einer Dicke $\delta^{(i)}$ gehörende Lösung $\gamma_n^{(i)}$ sei bekannt. Zum Auffinden der Lösung $\gamma_n^{(i+1)}$ für die Dicke $\delta^{(i+1)} = \delta^{(i)} + \Delta\delta$ benötigt die Iteration des Newton-Verfahrens einen Startwert. Dazu wird nun nicht der bekannte Wert $\gamma_n^{(i)}$ genommen, sondern eine bessere Näherung

$$\tilde{\gamma}_n^{(i+1)} = \gamma_n^{(i)} + \Delta\gamma, \qquad (3.9)$$

wobei die Änderung $\Delta\delta$ der Dicke über das totale Differential der Gl. (2.6)

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma_n} \Delta\gamma_n + \frac{\partial f}{\partial \delta} \Delta\delta = 0 \qquad (3.10)$$

so bestimmt wird, daß die Änderung $\Delta\gamma_n$ der Ausbreitungskonstanten γ_n vorgebbare Grenzen nicht überschreitet. Ausgehend von diesem Näherungswert $\tilde{\gamma}_n^{(i+1)}$ wird die Ausbreitungskonstante $\gamma_n^{(i+1)}$ für $\delta^{(i+1)}$ berechnet. Damit wird sichergestellt, daß alle Wellentypen, die mit denjenigen der leeren Hohlleitung korrespondieren,

---

1) Siehe auch Flußdiagramm (Abb. 5)

gefunden werden. In dieser Menge sind auch "slow waves" enthalten, wenn sie aufgrund der Eigenschaften des Ferriteinsatzes auftreten. Dabei handelt es sich um Wellentypen, die Oberflächenwellen an den Grenzflächen Luft/Ferrit ähnlich sind: Wird nämlich Gl. (2.6), ausgehend von Startwerten, die die Ausbreitungskonstanten solcher Oberflächenwellen auf einem unendlichen Ferrithalbraum mit gleichen Materialdaten sind, gelöst, so ergeben sich keine Wellentypen, die nicht schon nach der vorher beschriebenen Methode gefunden worden sind.

Die Ausbreitungskonstanten und Eigenfelder der unendlich langen mit Ferrit gefüllten Hohlleitung sind als Sonderfall in den Gln. (3.4a,b) enthalten. Die Felder ergeben sich mit den Bezeichnungen in Abb. 4 ($l \to \infty$) zu

$$\vec{E}_n = \vec{u}_y \, \tilde{E}_n^{(2)} \sin \frac{n\pi\tilde{x}}{\delta} \, e^{-\gamma_n z} , \tag{3.11}$$

$$\vec{H}_n = \tilde{E}_n^{(2)} \Big\{ \vec{u}_x \Big(\frac{j\gamma_n}{\omega\mu_0\mu_\perp} \sin \frac{n\pi\tilde{x}}{\delta} - \frac{\kappa}{\omega\mu_0\mu_\perp} \frac{n\pi}{\delta} \cos \frac{n\pi\tilde{x}}{\delta} \Big) + \\ + \vec{u}_z \Big(\frac{\kappa\gamma_n}{\omega\mu_0\mu_\perp} \sin \frac{n\pi\tilde{x}}{\delta} + \frac{j}{\omega\mu_0\mu_\perp} \frac{n\pi}{\delta} \cos \frac{n\pi\tilde{x}}{\delta} \Big) \Big\} e^{-\gamma_n z} , \tag{3.12}$$

mit

$$\gamma_n = \sqrt{\Big(\frac{n\pi}{\delta}\Big)^2 - k_0^2 \varepsilon_r \mu_\perp} \tag{3.13}$$

und

$$\tilde{x} = x - \frac{\delta}{2} . \tag{3.14}$$

3.3 Orthogonalitätsbeziehungen für die Hohlleitung mit Ferrit

Die Anwendung des Entwicklungssatzes erfordert die Kenntnis der zwischen den Eigenfunktionen bestehenden Orthogonalitätsbeziehungen. Für die leere Hohlleitung ergeben sich [13] die

bekannten Beziehungen

$$\iint_F \vec{E}_{tm} \cdot \vec{E}_{tn}\, dF = 0, \qquad m \neq n$$

$$\iint_F \vec{H}_{tm} \cdot \vec{H}_{tn}\, dF = 0, \qquad m \neq n \qquad (3.15a\text{-}c)$$

$$\iint_F \vec{E}_m \times \vec{H}_n \cdot \vec{u}_z\, dF = 0, \qquad m \neq n$$

wobei $\vec{E}_{tm}$ und $\vec{H}_{tm}$ die transversalen Anteile des elektrischen und magnetischen Feldes $\vec{E}_m$, $\vec{H}_m$ der m-ten Eigenwelle sind und die Integration über den Querschnitt F der Hohlleitung erfolgt. Diese einfachen Beziehungen gelten für die Hohlleitung mit einem Einsatz aus verlustbehaftetem anisotropem Material nicht mehr. Für diesen Fall lassen sich nur Beziehungen zwischen den Eigenfunktionen der belasteten Hohlleitung und denen des sogenannten "adjoint waveguide" formulieren, die als Biorthogonalitätsbeziehungen bezeichnet werden [10,11,14].

Dieser "adjoint waveguide" hat bei der angenommenen idealen Leitfähigkeit der Wände dieselbe Geometrie, aber die die Materialeigenschaften beschreibenden Tensoren werden durch ihre Transponierten ersetzt. Die Gl. (3.15c) entsprechende Biorthogonalitätsbeziehung lautet dann

$$(\gamma_n + \gamma'_m) \iint_F \left\{ (\vec{E}_n \times \vec{H}'_m - \vec{E}'_n \times \vec{H}_m) \cdot \vec{u}_z \right\} dF = 0 \,. \qquad (3.16)$$

$\vec{E}_n$ und $\vec{H}_n$ sind die elektrischen und magnetischen Felder der n-ten Eigenwelle der Hohlleitung mit Ferriteinsatz. Die gestrichenen Größen beziehen sich auf den "adjoint waveguide" mit den transponierten Tensoren, sind also Lösungen des adjungierten Problems, wobei für die z-Abhängigkeit aller Größen $\exp(-\gamma' z)$ gilt. Im vorliegenden Fall der zur Ausbreitungsrichtung transversalen Magnetisierung des Ferrits läßt sich Gl. (3.16) vereinfachen. Nach dem Reziprozitätstheorem für Wellenleiter mit gyrotropen Medien werden

deren vor- und rücklaufende Eigenwellen vertauscht, wenn der Tensor transponiert wird [15]. Es gilt nach Gl. (2.6)

$$(\gamma_n^v)' = -\gamma_n^r \,. \tag{3.17}$$

Damit erhält man aus Gln. (3.3) bis (3.5) und mit den Abkürzungen von Gl. (3.8)

$$(e_n^v)' = e_n^r \,, \qquad (h_n^v)' = -h_n^r \,. \tag{3.18a,b}$$

Mit diesen Beziehungen vereinfacht sich Gl. (3.16) zu

$$(\gamma_n^v - \gamma_m^r) \iint_F (e_n^v h_m^r + e_m^r h_n^v)\, dF = 0 \,. \tag{3.19a}$$

Da stets $\gamma_n^v \neq \gamma_m^r$ ist, gilt immer

$$\iint_F (e_n^v h_m^r + e_m^r h_n^v) dF = 0 \,. \tag{3.19b}$$

Weitere Beziehungen, die aus Gl. (3.16) in Verbindung mit Gln. (3.17) und (3.18) folgen, sind:

$$(\gamma_n^v - \gamma_m^v) \iint_F (e_n^v h_m^v + e_m^v h_n^v)\, dF = 0, \tag{3.20}$$

also

$$\iint_F (e_n^v h_m^v + e_m^v h_n^v)\, dF = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ N_n^v & \text{für } n = m \end{cases} \tag{3.21}$$

und analog

$$\iint_F (e_n^r h_m^r + e_m^r h_n^r)\, dF = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ N_n^r & \text{für } n = m \end{cases} \,. \tag{3.22}$$

3.4 Berechnung der Streumatrizen

3.4.1 Beschreibung mit der verallgemeinerten Streumatrix

Da die Ausbreitung der Eigenwellen in der unendlich langen Hohlleitung mit Ferriteinsatz entsprechend Abb. 1 ($l \to \infty$) bekannt ist, scheint es sinnvoll, im Falle eines Ferriteinsatzes endlicher Länge l den Stoßstellen Streumatrizen mit noch zu bestimmenden Elementen zuzuordnen und mit deren Hilfe das gesamte Problem nach der Methode der verallgemeinerten Streumatrix [16] zu formulieren. Die verallgemeinerte Streumatrix ist nicht auf die Verknüpfung ausbreitungsfähiger Wellen beschränkt, sondern berücksichtigt auch aperiodische Felder und ist daher im allgemeinen nicht von endlicher Ordnung. Die Streumatrix (S^o) für die Stoßstelle bei z = 0 verknüpft die Amplituden I_n^o und R_n^o von einfallenden und reflektierten Wellen an der Stelle z = -0 mit den Amplituden $\overline{A}_n$ und $\overline{B}_n$ der vor- und rücklaufenden Wellen an der Stelle z = +0 (siehe Gl. (3.8) und Abb. 6). Setzt man um einer einheitlichen Bezeichnung willen entsprechend Gl. (3.8) $\overline{A}_n = A_n^o$, $\overline{B}_n = B_n^o$ und faßt die Größen I_n^o, R_n^o, A_n^o und B_n^o zu den Spaltenvektoren (I^o), (R^o), (A^o) und (B^o) zusammen, so gilt:

$$\begin{pmatrix}(R^o)\\(A^o)\end{pmatrix} = (S^o)\begin{pmatrix}(I^o)\\(B^o)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(S_{11}^o) & (S_{12}^o)\\(S_{21}^o) & (S_{22}^o)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(I^o)\\(B^o)\end{pmatrix}. \qquad (3.23)$$

Ganz analog sind die Größen A_n^o, B_n^o und A_n^l, B_n^l an den Stellen z = +0 und z = l-0 über die Streumatrix (S^T) durch

$$\begin{pmatrix}(B^o)\\(A^l)\end{pmatrix} = (S^T)\begin{pmatrix}(A^o)\\(B^l)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(0) & (\Gamma^r)\\(\Gamma^v) & (0)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}(A^o)\\(B^l)\end{pmatrix} \qquad (3.24a)$$

verbunden. Dabei sind die Untermatrizen (Γ^r) und (Γ^v) Diagonalmatrizen mit den Elementen

$$\Gamma^{v}_{n,n} = e^{-\gamma^{v}_{n} l} \tag{3.24b}$$

und

$$\Gamma^{r}_{n,n} = e^{+\gamma^{r}_{n} l} \quad . \tag{3.24c}$$

An der zweiten Stoßstelle z = 1 gilt schließlich

$$\begin{pmatrix} (B^1) \\ \\ (R^1) \end{pmatrix} = (S^1) \begin{pmatrix} (A^1) \\ \\ (I^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S^1_{11}) & (S^1_{12}) \\ \\ (S^1_{21}) & (S^1_{22}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (A^1) \\ \\ (I^1) \end{pmatrix} , \tag{3.25}$$

wenn I^1_n und R^1_n die Amplituden der bei z = 1+0 zu- und ablaufenden Wellen sind. Die durch Zusammenschaltung der drei Teile entstehende Struktur hat die verallgemeinerte Streumatrix

$$\begin{pmatrix} (R^0) \\ \\ (R^1) \end{pmatrix} = (S^G) \begin{pmatrix} (I^0) \\ \\ (I^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S^G_{11}) & (S^G_{12}) \\ \\ (S^G_{21}) & (S^G_{22}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (I^0) \\ \\ (I^1) \end{pmatrix} . \tag{3.26}$$

Sind die Spaltenvektoren in Gl. (3.26) geeignet normiert[1], so wird (S^G) transponiert, wenn das magnetisierende Gleichfeld umgepolt wird [15]. Aus den drei Streumatrizen (S^0), (S^T) und (S^1) können nun die Untermatrizen von (S^G) unter Berücksichtigung der zwischen z = 0 und z = 1 auftretenden Mehrfachreflexionen wie in Abb. 6 skizziert, gewonnen werden. Man erhält bei Anregung durch (I^0) mit $(I^1) = 0$

$$(S^G_{11}) = (S^0_{11}) + \sum_{i=0}^{\infty} (S^0_{12})(\Gamma^r)(S^1_{11})\left[(\Gamma^v)(S^0_{22})(\Gamma^r)(S^1_{11})\right]^i (\Gamma^v)(S^0_{21}) \tag{3.27a}$$

und

$$(S^G_{21}) = \sum_{i=0}^{\infty} (S^1_{21})\left[(\Gamma^v)(S^0_{22})(\Gamma^r)(S^1_{11})\right]^i (\Gamma^v)(S^0_{21}) \quad . \tag{3.27b}$$

---

1) Diese Normierung führt bei den ausbreitungsfähigen Wellen zu den sogenannten "Leistungswellen" [17]. Sie kann formal auch auf aperiodische Felder ausgedehnt werden [18].

Die Untermatrizen (S^G_{12}) und (S^G_{22}) findet man analog durch Anregung mit (I^1) für $(I^o) = (0)$, indem man in Gln. (3.27) die Indizes 1 und 2, v und r sowie o und 1 vertauscht.

Eine einfache Symmetriebetrachtung zeigt, daß das Verhalten der Stoßstelle z = 0 bei Umkehrung der Gleichfeldmagnetisierung (gestrichene Größen) und Vertauschung der Torbezeichnungen 1 und 2 gleich dem der Stoßstelle bei z = 1 ist, so daß

$$(S^o)' = \begin{pmatrix} (S^o_{11})' & (S^o_{12})' \\ (S^o_{21})' & (S^o_{22})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S^1_{22}) & (S^1_{21}) \\ (S^1_{12}) & (S^1_{11}) \end{pmatrix} \tag{3.28a}$$

und

$$(S^1)' = \begin{pmatrix} (S^1_{11})' & (S^1_{12})' \\ (S^1_{21})' & (S^1_{22})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (S^o_{22}) & (S^o_{21}) \\ (S^o_{12}) & (S^o_{11}) \end{pmatrix}. \tag{3.28b}$$

Eine Umpolung des magnetisierenden Gleichfeldes hat außerdem nach Gln. (3.24) eine Vertauschung der Matrizen (Γ^v) und (Γ^r) zur Folge, so daß die Berechnung der Untermatrizen (S^G_{12}) und (S^G_{22}) auch durchgeführt werden kann, indem bei unveränderter Anregung durch (I^o) für das magnetische Gleichfeld die entgegengesetzte Richtung angenommen wird, wie bei der Berechnung von (S^G_{11}) und (S^G_{21}).

Die unendlichen Reihen, die in Gln. (3.27) auftreten, sind konvergent und lassen sich aufsummieren [16]. Gleichungen (3.27a) und (3.27b) lassen sich in der Form

$$(S^G_{11}) = (S^o_{11})+(S^o_{12})(\Gamma^r)(S^1_{11})\left[(1)-(\Gamma^v)(S^o_{22})(\Gamma^r)(S^1_{11})\right]^{-1}(\Gamma^v)(S^o_{21}) , \tag{3.29}$$

$$(S^G_{21}) = (S^1_{21})\left[(1)-(\Gamma^v)(S^o_{22})(\Gamma^r)(S^1_{11})\right]^{-1}(\Gamma^v)(S^o_{21}) \tag{3.30}$$

schreiben, wenn (1) die Einheitsmatrix bedeutet. Die Elemente der Matrizen (Γ^v) und (Γ^r) gehen mit wachsendem n, wegen der mit n zunehmenden Dämpfungskonstanten α_n (siehe S. 11) gegen Null. Stark gedämpfte Wellentypen brauchen daher bei der Berechnung der Streumatrix nach Gln. (3.29) und (3.30) nicht berücksichtigt werden. Deswegen ist die obige Form der Beschreibung für Probleme der hier vorliegenden Art besonders geeignet. Daher sollen die Lösungen für die Streumatrix - bei Anwendung des Entwicklungssatzes ergeben sich verschiedene Möglichkeiten der Darstellung - in der Form von Gln. (3.29) und (3.30) geschrieben werden. Dies ist prinzipiell immer möglich, jedoch gelegentlich mit zusätzlichen Matrizenoperationen verbunden. In Fällen, in denen der Aufwand für die Umformung nicht gerechtfertigt scheint, wird auf diese verzichtet.

3.4.2 Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen

Um die verallgemeinerte Streumatrix der Gesamtstruktur zu erhalten, müssen die transversalen Feldstärkekomponenten E_y und H_x in den Ebenen z = 0 und z = 1 angepaßt werden. Da die x-Abhängigkeit der transversalen Komponenten der Eigenfelder auf beiden Seiten der Grenzfläche im allgemeinen verschieden ist, können die Stetigkeitsbedingungen nicht durch jeweils einen einzigen Wellentyp erfüllt werden. Vielmehr müssen die Transversalkomponenten der Felder in den Grenzflächen durch unendliche Reihen dargestellt werden. Beim Einfall von H_{no}-Wellen von $z = -\infty$ erhält man für E_y und H_x an der Stelle z = 0

$$\sum_n \left(I_n + R_n\right)u_n = \sum_m \left(A_m e_m^v + B_m e_m^r \exp(+\gamma_m^r 1)\right) \quad ,$$

$$\sum_n \left(-I_n + R_n\right)u_n Y_n = \sum_m \left(A_m h_m^v + B_m h_m^r \exp(+\gamma_m^r 1)\right) \quad , \qquad (3.31a,b)$$

und an der Stelle z = 1

$$\sum_n u_n T_n = \sum_m \left(A_m e_m^v \exp(-\gamma_m^v \, 1) + B_m e_m^r \right) ,$$

$$- \sum_n u_n Y_n T_n = \sum_m \left(A_m h_m^v \exp(-\gamma_m^v \, 1) + B_m h_m^r \right) . \qquad (3.32a,b)$$

Dabei sind I_n, R_n und T_n die Amplituden der einfallenden, reflektierten und transmittierten H_{no}-Wellen in den beiden leeren Teilen der Hohlleitung ($z \leq 0$, $z \geq 1$), Y_n die dazugehörigen Feldwellenleitwerte

$$Y_n = \frac{k_{zn}}{\omega \mu_o} \qquad (3.33)$$

und

$$u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{a} \left(x + d + \frac{\delta}{2}\right)\right) \qquad (3.34)$$

die Eigenfunktionen bei der speziellen Wahl des Koordinatensystems (Abb. 1). Die Größen A_m der vorlaufenden H_{mo}-Wellen innerhalb des bedämpften Teils der Hohlleitung ($0 \leq z \leq 1$) sind auf die Ebene $z = 0$, die Größen B_m der rücklaufenden Wellen auf die Ebene $z = 1$ bezogen.[1] Durch diese zweckmäßige Wahl der Bezugsebenen wird erreicht, daß in den Gln. (3.23) und (3.24) keine exponentiell aufklingenden Ausdrücke enthalten sind, da

$$\left| e^{-\gamma_m^v \, 1} \right| \leq 1 \quad \text{und} \quad \left| e^{+\gamma_m^r \, 1} \right| \leq 1 \qquad (3.35a,b)$$

gelten. Damit werden numerische Schwierigkeiten vermieden, die sich insbesondere bei langen Stäben mit $|\gamma_m 1| \gg 1$ ergeben könnten.

Bei Umkehrung der Gleichfeldmagnetisierung werden alle Größen in Gln. (3.31) und (3.32) bis auf u_n, Y_n und I_n durch die entsprechenden gestrichenen Größen ersetzt.

---

1) I_n, R_n, A_n, B_n und T_n sind die Größen I_n^o, R_n^o, A_n^o, B_n^1 und R_n^1 im Abschnitt 3.4.1 für $I_n^1 = 0$.

Die geschlossene Auflösung der Gln. (3.31) und (3.32) nach den Größen R_n, T_n oder bei umgekehrter Gleichfeldmagnetisierung nach R'_n und T'_n ist im allgemeinen nicht möglich. Die unendlichen Reihen müssen daher bei n = N und m = M abgebrochen werden. Dies setzt voraus, daß die Beiträge aller nicht berücksichtigten Wellentypen zu den interessierenden Streumatrixgrößen vernachlässigt werden können. Dann können die Gleichungen durch Anwendung des Entwicklungssatzes in lineare Gleichungssysteme überführt werden. Die dabei unter Verwendung der verschiedenen Orthogonalitätsbeziehungen sich ergebenden Möglichkeiten werden im folgenden diskutiert.

3.4.3 Entwicklung nach den Eigenfunktionen der leeren Hohlleitung

Wie schon erwähnt, entspricht die Entwicklung der transversalen Feldstärkekomponenten E_y und H_x nach den Eigenfunktionen der leeren Hohlleitung einer Fourierentwicklung. Diese Form der Entwicklung ist nicht auf die Struktur nach Abb. 4 anwendbar, weil die Komponente H_x in z = 0 und z = 1 für $|x| > b/2$ keiner Randbedingung unterliegt. Für eine Anordnung nach Abb. 1 erhält man aus Gln. (3.31) und (3.32) vier lineare Gleichungssysteme, die in Matrizenschreibweise folgende Form haben:

$$(I) + (R) = (V)(A) + (W)(\Gamma^r)(B)$$

$$-(Y)(I) + (Y)(R) = (Q)(A) + (U)(\Gamma^r)(B)$$

(3.36a-d)

$$(T) = (V)(\Gamma^v)(A) + (W)(B)$$

$$-(Y)(T) = (Q)(\Gamma^v)(A) + (U)(B) \ .$$

Dabei sind (I), (R) und (T) Spaltenvektoren der Ordnung N, (A) und (B) Spaltenvektoren der Ordnung M mit den Elementen entsprechend Gln. (3.31) und (3.32). (Y) ist die Diagonalmatrix der

Feldwellenleitwerte mit den Elementen nach Gl. (3.33). Die Diagonalmatrizen (Γ^V) und (Γ^r) sind durch Gln. (3.24b) und (3.24c) beschrieben. Die N x M Matrizen (V), (W), (Q) und (U) enthalten die Entwicklungskoeffizienten, die sich nach den Gleichungen

$$v_{n,m} = \frac{2}{F} \iint_F e_m^v \, u_n \, dF$$

$$w_{n,m} = \frac{2}{F} \iint_F e_m^r \, u_n \, dF$$

$$q_{n,m} = \frac{2}{F} \iint_F h_m^v \, u_n \, dF \qquad (3.37a\text{-}d)$$

$$u_{n,m} = \frac{2}{F} \iint_F h_m^r \, u_n \, dF$$

berechnen, wobei die Integration über den Hohlleitungsquerschnitt F erfolgt.

Die Auflösung der linearen Gleichungssysteme (3.36) nach den Unbekannten (R) und (T) ist nur für N = M möglich, und benötigt die folgenden Schritte:

$$(B) = -\left[(Y)(W)+(U)\right]^{-1}\left[(Y)(V)+(Q)\right](\Gamma^V)(A) = (H_1)(\Gamma^V)(A), \quad (3.38)$$

$$(I)+(R) = \left[(V)+(W)(\Gamma^r)(H_1)(\Gamma^V)\right](A) = (H_2)(A) \quad , \quad (3.39)$$

$$(Y)\left[-(I)+(R)\right] = \left[(Q)+(U)(\Gamma^r)(H_1)(\Gamma^V)\right](A) = (H_3)(A) \quad . \quad (3.40)$$

Die Eliminierung von (A) ergibt zunächst

$$(R) = \left[(H_3)^{-1}(Y)-(H_2)^{-1}\right]^{-1}\left[(H_3)^{-1}(Y)+(H_2)^{-1}\right](I) = (S_{11}^G)(I) \qquad (3.41)$$

und schließlich mit der Einheitsmatrix (1)

$$(T) = \left((V)+(W)(H_1)\right)(\Gamma^V)(H_2)^{-1}\left[(1)+(S^G_{11})\right](I) = (S^G_{21})(I). \qquad (3.42)$$

Die Gleichungen (3.41) und (3.42) lassen keinen unmittelbaren Zusammenhang mit den Formulierungen (3.29) und (3.30) erkennen. Der wesentliche Rechenaufwand der Auflösung liegt neben der Berechnung der Entwicklungskoeffizienten in den vier Inversionen und sieben Multiplikationen von Matrizen der Ordnung N.

Für die entgegengesetzte Gleichfeldmagnetisierung folgt mit Gln. (3.18) aus Gln. (3.37) für die Matrizen der Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned} (V)' &= (W) \\ (W)' &= (V) \\ (Q)' &= -(U) \\ (U)' &= -(Q) \end{aligned} \qquad (3.43a\text{-}d)$$

und für

$$\begin{aligned} (\Gamma^V)' &= (\Gamma^\Gamma) \\ (\Gamma^\Gamma)' &= (\Gamma^V)\ , \end{aligned} \qquad (3.44a,b)$$

so daß zwar für diesen Fall die Auflösung der linearen Gleichungssysteme wiederholt werden, aber die dazu benötigten Matrizen nicht neu berechnet werden müssen. Die Matrizen (S^G_{11}) und (S^G_{21}) verknüpfen die Amplituden des elektrischen Feldes der einzelnen Eigenwellen miteinander. Die Streumatrix $(\bar{S})$, die die Leistungswellen [17] in Beziehung setzt, berechnet sich durch Normieren mit der Diagonalmatrix (D), deren Elemente

$$d_{n,n} = d_{n+P,n+P} = \sqrt{Y_n} \qquad (3.45)$$

sich aus den Wurzeln der Wellenwiderstände ergeben, zu

$$(\bar{S}) = (D)^{-1} \begin{pmatrix} (S_{11}^G) & (S_{21}^G)' \\ (S_{21}^G) & (S_{11}^G)' \end{pmatrix} (D) \; . \qquad (3.46)$$

Die Ordnung 2P der Streumatrix ist von der Zahl N der zur Berechnung verwendeten Wellentypen zu unterscheiden, wobei $N \geq P$ gelten muß. Für den hauptsächlich interessierenden Fall $P = 1$ kann die Normierung nach Gl. (3.46) entfallen.

3.4.4 Entwicklung nach den Eigenfunktionen der belasteten Hohlleitung

Unter Anwendung der Biorthogonalitätsbeziehungen (3.19) bis (3.22) können die Felder in den Grenzflächen nach den Eigenfunktionen der belasteten Hohlleitung entwickelt werden. Auch diese Form der Entwicklung ist auf die Hohlleitungsstruktur nach Abb. 4 nicht anwendbar, weil die Eigenfunktionen nur für $|x| \leq \delta/2$ definiert sind, und die Randbedingung $E_y = 0$ für $|x| > \delta/2$ in den Grenzflächen $z = 0$ und $z = 1$ nicht erfüllt werden kann. Für die Anordnung nach Abb. 1 haben die linearen Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise die Form

$$\begin{aligned} (X^V)(I) + (Z^V)(R) &= (A) \\ (Z^r)(I) + (X^r)(R) &= (\Gamma^r)(B) \\ (X^V)(T) &= (\Gamma^V)(A) \\ (Z^r)(T) &= (B) \end{aligned} \qquad (3.47a\text{-}d)$$

mit den Matrixelementen

$$x^{v}_{m,n} = \frac{\iint\limits_{F} u_n h^{v}_{m}\, dF - Y_n \iint\limits_{F} u_n e^{v}_{m}\, dF}{2 \iint\limits_{F} e^{v}_{m} h^{v}_{m}\, dF}$$

$$x^{r}_{m,n} = \frac{\iint\limits_{F} u_n h^{r}_{m}\, dF + Y_n \iint\limits_{F} u_n e^{r}_{m}\, dF}{2 \iint\limits_{F} e^{r}_{m} h^{r}_{m}\, dF} \qquad (3.48a\text{-}d)$$

$$z^{v}_{m,n} = \frac{\iint\limits_{F} u_n h^{v}_{m}\, dF + Y_n \iint\limits_{F} u_n e^{v}_{m}\, dF}{2 \iint\limits_{F} e^{v}_{m} h^{v}_{m}\, dF}$$

$$z^{r}_{m,n} = \frac{\iint\limits_{F} u_n h^{r}_{m}\, dF - Y_n \iint\limits_{F} u_n e^{r}_{m}\, dF}{2 \iint\limits_{F} e^{r}_{m} h^{r}_{m}\, dF} ,$$

die eng mit denen der vorhergehenden Entwicklung verknüpft sind, wie ein Vergleich mit Gln. (3.37) zeigt. Die Auflösung der Gleichungen (3.47) mit N = M nach (T) und (R) ergibt

$$(T) = \left[(Z^{v})^{-1}(\Gamma^{v})^{-1}(X^{v})-(X^{r})^{-1}(\Gamma^{r})(Z^{r})\right]^{-1}\left[(Z^{v})^{-1}(X^{v})-(X^{r})^{-1}(Z^{r})\right](I) \qquad (3.49a,b)$$

$$(T) = (S^{G}_{21})(I)$$

und

$$(R) = \left[-(X^{r})^{-1}(Z)^{r}+(X^{r})^{-1}(\Gamma)^{r}(Z)^{r}(S^{G}_{21})\right](I) = (S^{G}_{11})(I) \qquad (3.50)$$

Die Beträge der Elemente der inversen Diagonalmatrix $(\Gamma^V)^{-1}$ wachsen exponentiell mit zunehmender Länge l der Stoffeinsätze und/oder mit der Zahl N der berücksichtigten Wellentypen. Dann wird die in der ersten eckigen Klammer von Gl. (3.49a) stehende Matrix fast singulär und ihre Inversion führt zu numerischen Fehlern. Diese lassen sich vermeiden, wenn man Gl. (3.49a) in

$$(T) = \left[(X^V)-(\Gamma^V)(Z^V)(X^\Gamma)^{-1}(\Gamma^\Gamma)(Z^\Gamma)\right]^{-1}(\Gamma^V)\left[(X^V)-(Z^V)(X^\Gamma)^{-1}(Z^\Gamma)\right](I) \tag{3.51}$$

umformt. An einem typischen Beispiel zeigt Tabelle 1 die unterschiedlichen numerischen Ergebnisse der Formulierung nach Gln. (3.49) und (3.50) gegenüber der nach Gln. (3.51) und (3.50) in Abhängigkeit von der Länge l für zwei Werte von N: Die jeweils berechneten Reflexionsfaktoren S_{11} und Übertragungsfaktoren S_{21} stimmen bis zu einer Länge von l = 12,5 mm praktisch überein. Gleichzeitig wird deutlich, wie wenig sich die Ergebnisse insbesondere für S_{21} bei N = 5 und N = 15 unterscheiden. Bei l = 15 mm liefert Gl. (3.49) für N = 15 das offensichtlich falsche Resultat $|S_{11}| > 1$, während für N = 5 noch bis zu einer Länge l = 30 mm die Ergebnisse kaum voneinander abweichen. Die zur Berechnung von S_{11} größere Anzahl von Rechenoperationen führt dazu, daß hier physikalisch unsinnige Werte schon dann auftreten, wenn die Abweichungen von S_{21} noch in der Größenordnung weniger Prozent liegen.

Dieses Beispiel zeigt zugleich den Vorteil der Formulierung entsprechend dem Konzept der verallgemeinerten Streumatrix. Ein Vergleich von Gln. (3.50) und (3.51) mit (3.29) und (3.30) macht nämlich deutlich, daß

$$(S^o_{11}) \triangleq -(X^\Gamma)^{-1}(Z^\Gamma),$$

$$(S^o_{12}) \triangleq (X^\Gamma)^{-1},$$

$$(S^o_{21}) \triangleq (X^V)-(Z^V)(X^\Gamma)^{-1}(Z^\Gamma),$$

$$(S^o_{22}) \triangleq (Z^V)(X^\Gamma)^{-1}$$

und

$$(S^1_{11}) \triangleq (Z^r)(X^v)^{-1},$$

$$(S^1_{21}) \triangleq (X^v)^{-1}$$

einander entsprechen.

Die Auflösung nach (T) erfordert zwei Inversionen und vier Multiplikationen von Matrizen der Ordnung N x N, die Berechnung von (R) zwei weitere Multiplikationen. Für den Fall des umgekehrten magnetischen Gleichfeldes folgt aus Gln. (3.18) und (3.48)

$$(X^v)' = (X^r),$$

$$(Z^v)' = (Z^r), \qquad (3.52a,b)$$

so daß die Entwicklungskoeffizienten nicht neu bestimmt werden brauchen.

3.4.5 Gemischte Entwicklungen

Durch Kombination von Gln. (3.36) und (3.47) sind weitere Möglichkeiten zur Lösung des Problems gegeben. Zwei davon sollen näher untersucht werden. Eine Entwicklung in der Grenzfläche z = 0 nach der Eigenfunktion der leeren und in z = 1 nach denen der gefüllten Hohlleitung liefert:

$$(I)+(R) = (V)(A)+(W)(\Gamma^r)(B)$$

$$-(Y)(I)+(Y)(R) = (Q)(A)+(U)(\Gamma^r)(B) \qquad (3.53a-d)$$

$$(X^v)(T) = (\Gamma^v)(A)$$

$$(Z^r)(T) = (B)\ .$$

Auch diese Formulierung des Problems ist, wie in den vorstehenden Abschnitten begründet, nicht auf die Struktur nach Abb. 4 anwendbar. Für die Anordnung nach Abb. 1 benötigt die Auflösung nach (T) nur eine Inversion und zwei Multiplikationen von rechteckigen Matrizen, wobei N ≥ M sein muß, damit (T) und (I) durch eine N x N Matrix (S^G_{21}) verknüpft werden:

$$(T) = \Big[\big((Y)(V)-(Q)\big)(\Gamma^V)^{-1}(X^V)+\big((Y)(W)-(U)\big)(\Gamma^r)(Z^r)\Big]^{-1}(2Y)(I), \tag{3.54a,b}$$

$$(T) = (S^G_{21})(I).$$

Drei weitere Multiplikationen ergeben

$$(R) = (2Y)^{-1}\Big[\big((Y)(V)+(Q)\big)(\Gamma^V)^{-1}(X^V)+\big((Y)(W)+(U)\big)(\Gamma^r)(Z^r)\Big](S^G_{21})(I). \tag{3.55}$$

Trotz des geringen Rechenaufwandes sind diese Formulierungen wiederum wegen der Diagonalmatrizen $(\Gamma^V)^{-1}$ zur numerischen Auswertung schlecht geeignet. Während eine einfache Umformung von Gl. (3.54)

$$(S^G_{21}) = \Big[(X^V)+(\Gamma^V)\big[(Y)(V)-(Q)\big]^{-1}\big[(Y)(W) - (U)\big](\Gamma^r)(Z^r)\Big]^{-1}(\Gamma^V)\big[(Y)(V)-(Q)\big]^{-1}(2Y) \tag{3.56}$$

einen Ausdruck entsprechend Gl. (3.30) liefert, ist eine ähnliche Umformung für Gl. (3.55) mit mehr Aufwand verbunden, weil die dort auftretenden Ausdrücke teilweise den Elementen der verallgemeinerten Wellenkettenmatrizen (T^o) und (T^1) entsprechen z.B.

$$(S^G_{11}) = \big[(T^o_{12})(\Gamma^V)^{-1}(T^1_{22})+(T^o_{11})(\Gamma^r)(S^1_{11})(S^1_{21})^{-1}\big](S^1_{21})\big[(1) - -(\Gamma^V)(S^o_{22})(\Gamma^r)(S^1_{11})\big]^{-1}(\Gamma^V)(S^o_{21}) , \tag{3.57}$$

so daß sich Gl. (3.57) erst nach einiger Rechnung in die Form von Gl. (3.29) umwandeln läßt.

$$(S_{11}^G) = (2Y)^{-1}\left[(Y)(V)+(Q)\right]\left[(Y)(V)-(Q)\right]^{-1}(2Y) +$$

$$+ (2Y)^{-1}\{\left[(Y)(W)+(U)\right]-\left[(Y)(V)+(Q)\right]\left[(Y)(V)-(Q)\right]^{-1}\left[(Y)(W) -$$

$$- (U)\right]\}(\Gamma^r)(Z^r)\{(X^v)+(\Gamma^v)\left[(Y)(V)-(Q)\right]^{-1}\left[(Y)(W) -$$

$$- (U)\right](\Gamma^r)(Z^r)\}^{-1}(\Gamma^v)\left[(Y)(V)-(Q)\right]^{-1}(2Y). \qquad (3.58)$$

Die Berechnung von (S_{21}^G) nach Gl. (3.56) ist nur für N = M möglich und erfordert die Inversion von zwei und die Multiplikation von drei Matrizen der Ordnung N. Die Berechnung von (S_{11}^G) nach Gl. (3.58) benötigt bei Speicherung von Zwischenergebnissen drei weitere Matrizenmultiplikationen.

Eine auch für die Struktur nach Abb. 4 anwendbare Entwicklung muß neben der Stetigkeit der transversalen Feldkomponenten für $|x| \leq \delta/2$ berücksichtigen, daß

$$E_y = 0 \quad \text{für} \quad |x| > \delta/2 \qquad (3.59)$$

ist, während über H_x für $|x| > \delta/2$ keine Aussage gemacht werden kann. Für die Gleichungen

$$(I)+(R) = (V)(A)+(W)(\Gamma^r)(B)$$

$$(T) = (V)(\Gamma^v)(A)+(W)(B) \qquad (3.60a,b)$$

wird die Integration nach Gln. (3.37a,b) daher unter Berücksichtigung von Gln. (3.59) über den Querschnitt F_1 der breiteren Hohlleitung durchgeführt. Während für die Gleichungen

$$(X^v)(I)+(Z^v)(R) = (A)$$

$$(X^v)(T) = (\Gamma^v)(A) \qquad (3.60c,d)$$

sich die Integration nach (3.48a,b) nur über den Querschnitt F_2 der schmaleren Hohlleitung erstreckt. Die Auflösung von Gln. (3.60) benötigt zwei Inversionen und neun Multiplikationen von N x M Matrizen und ergibt:

$$(B) = \left[(X^V)(W)\right]^{-1}\left[(1)-(X^V)(V)\right](\Gamma^V)(A) = (H_1)(\Gamma^V)(A) \tag{3.61}$$

$$(R) = \left\{-(1)+\left[(V)+(W)(\Gamma^r)(H_1)(\Gamma^V)\right](Z^V)\right\}^{-1} \cdot \left\{(1)-\left[(V)+(W)(\Gamma^r)(H_1)(\Gamma^V)\right](X^V)\right\}(I) \tag{3.62a}$$

$$(R) = (S_{11}^G)(I) \tag{3.62b}$$

$$(T) = \left[(V)+(W)(H_1)\right](\Gamma^V)\left[(X^V)+(Z^V)(S_{11}^G)\right](I) = (S_{21}^G)(I). \tag{3.63}$$

Die Bedingung $N \geq M$ muß eingehalten werden, damit (S_{11}^G) und (S_{21}^G) von der Ordnung N x N sind. Die Gln. (3.62) und (3.63) lassen keinen unmittelbaren Zusammenhang zu den Formulierungen (3.29) und (3.30) erkennen.

3.5 Ergebnisse und Diskussion der Rechnung

3.5.1 Konvergenz der Entwicklungen

Für den allgemeinen Fall eines verlustbehafteten Einsatzes liegen für die Strukturen nach Abb. 1 und 4 in der Literatur bisher keine Ergebnisse vor, mit denen die hier erzielten verglichen werden können. Es soll daher zunächst untersucht werden, wie sich der Fehler auswirkt, der durch Abbruch der unendlichen Reihen (3.31) und (3.32) entsteht, und ob die verschiedenen, in Abschnitt 3.4 angegebenen, Entwicklungen zu den gleichen numerischen Ergebnissen führen. Die Übertragungsfaktoren S_{21} und S_{12} wurden für ein

spezielles Beispiel der Anordnung nach Abb. 1 mit Gln. (3.42), (3.51) und (3.63) berechnet und für verschiedene Werte N = M in Tabelle 2 zusammengestellt. Man sieht, daß die Ergebnisse für die drei verschiedenen Entwicklungen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Interessant ist dabei ein Vergleich der zur Aufstellung und Auflösung der linearen Gleichungssysteme benötigten Rechenzeiten[1] in Abhängigkeit von der Zahl N der berücksichtigten Wellentypen (Abb. 7) für die Entwicklung nach den Eigenfunktionen der leeren Hohlleitung (höchste Anzahl von Matrizenoperationen, siehe Abschnitt 3.4.3) und nach denen der belasteten Hohlleitung (geringste Anzahl von Matrizenoperationen, siehe Abschnitt 3.4.4). Der Anstieg der Rechenzeiten ist wesentlich durch die Matrizeninversionen bedingt und ungefähr proportional N^3. Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten benötigt in beiden Fällen in etwa die gleichen Zeiten.

Für einige andere Beispiele der Anordnung nach Abb. 1 wurden die Übertragungsfaktoren nach Abschnitt 3.4.3 in Abhängigkeit von N berechnet und in Tabelle 3 zusammengestellt. Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, daß die Übertragungsfaktoren für N = 20 und N = 30 sich praktisch nicht mehr unterscheiden, d.h. daß die Konvergenz der Ergebnisse gut und der Abbruch der unendlichen Reihen gerechtfertigt ist.

3.5.2 Numerische Stabilität

Wie bereits in den Abschnitten 3.4.2 und 3.4.3 (Tab. 1) angedeutet, besteht die Gefahr, daß analytisch gleichwertige Formulierungen unter Umständen zu verschiedenen numerischen Ergebnissen führen. Um solche Fehlerquellen aufzudecken und Formulierungen zu

---

1) Alle Angaben beziehen sich auf die Anlage TR440 des Rechenzentrums der RUB, auf der die Berechnungen durchgeführt wurden.

finden, die zur numerischen Auswertung geeignet sind, können die Ergebnisse durch Vergleich mit den für einige Grenzfälle bekannten Resultaten geprüft werden. Dazu gehört die strenge Lösung des Problems für $l = 0$ oder $\delta = 0$ oder $\delta = a$ oder $\varepsilon_r = \mu = 1$ und $\varkappa = 0$ mit jeweils beliebigen Werten der anderen Parameter. Weiterhin müssen sich die Übertragungsfaktoren S_{12} und S_{21} sowohl bei einer Umkehr des magnetisierenden Gleichfeldes als auch bei der Spiegelung der Struktur an einer Schmalseite der Hohlleitung vertauschen. Die Überprüfung der Ergebnisse anhand dieser Bedingung macht deutlich, daß die eingangs getroffene Wahl des Koordinatensystems in der Mitte der jeweiligen Ferritplatte (siehe Abb. 1 und 4) besonders zweckmäßig für die numerische Auswertung ist. Die im allgemeinen komplexen Argumente der Winkelfunktionen in Gl. (3.7) haben nämlich bei dieser Lage des Koordinatensystems die Form $(q\delta/2)$ und sind betragsmäßig immer kleiner als bei jeder anderen Wahl des Koordinatensystems. Für ein verschobenes Koordinatensystem $(\overline{x},y,z)$ z.B. mit dem Ursprung an der Hohlleitungswand, also mit

$$\overline{x} = x + d + \frac{\delta}{2} \tag{3.64}$$

treten Argumente der Form (qd) und $q(d+\delta)$ auf. Letzteres ist betragsmäßig immer größer als $(q\delta/2)$ und kann für große Werte von δ und d zu falschen Ergebnissen (durch Differenzbildung großer Zahlen) bei der Berechnung der Eigenvektoren nach Gl. (3.7) führen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß durch die nach Abschnitt 3.2 vorgenommene Ordnung der Wellentypen im Hohlleitungsteil mit Ferriteinsatz die in der Nähe der Hauptdiagonalen stehenden Elemente der Entwicklungsmatrizen (Gln. (3.37) und (3.48)) überwiegen. Das führt dazu, daß bei den auftretenden Matrizeninversionen das einfache und schnelle Verfahren nach Gauß Verwendung finden kann [19].

3.5.3 Allgemeine Kriterien für verlustfreie Materialeinsätze

Die Streumatrix eines verlustfreien Mehrtores erfüllt die Bedingung (z.B. [17])

$$(S)^{*t}(S) = (1). \tag{3.65}$$

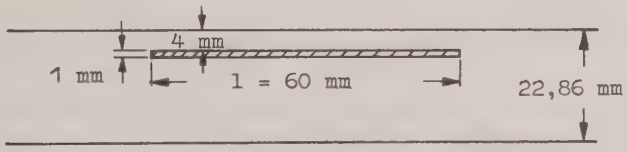
Unter der Annahme, daß in den leeren Teilen der Hohlleitungsstrukturen nur die H_{10}-Welle ausbreitungsfähig ist, erhält man aus Gl. (3.65)

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1,$$

$$|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1, \tag{3.66a-c}$$

$$(\text{arc } S_{12} + \text{arc } S_{21}) - (\text{arc } S_{11} + \text{arc } S_{22}) = \pm 180^\circ.$$

Um zu überprüfen, ob und unter welchen Bedingungen die nach Abschnitt 3.4 berechneten Streumatrizen die Gl. (3.65) erfüllen, wird zunächst als Beispiel die Streumatrix eines Hohlleitungsstückes der Länge l = 60 mm mit einer verlustfreien Ferritplatte (ε_r = 12,5, μ = 0,7, $\varkappa$ = −0,8; δ = 1mm; f = 9,23 GHz) im Abstand



d = 4 mm von der Hohlleitungsschmalseite berechnet. Für N = 12 ergibt sich:

$$(S) = \begin{pmatrix} 0{,}038125\, e^{-j144{,}5^\circ} & 0{,}99927\, e^{-j12{,}2^\circ} \\ 0{,}99927\, e^{-j96{,}8^\circ} & 0{,}038226\, e^{-j144{,}5^\circ} \end{pmatrix}.$$

Die Überprüfung der Ergebnisse nach Gl. (3.66) liefert

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 0{,}9999,$$

$$|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1{,}0000$$

und

$$(\text{arc } S_{12} + \text{arc } S_{21}) - (\text{arc } S_{11} + \text{arc } S_{22}) = 179{,}9^\circ.$$

Führt man die gleichen Berechnungen durch ohne dabei die zu den Ausbreitungskonstanten $\gamma_2^v = 0{,}853\text{-}j0{,}623$ [cm^{-1}], $\gamma_2^r = -0{,}853\text{-}j0{,}623$ [cm^{-1}] gehörenden Eigenwellen zu berücksichtigen (um wieder N = 12 zu erhalten, werden die zu $\gamma_{13}^{v,r}$ gehörenden Eigenwellen mitgenommen), so erhält man die Streumatrix

$$(S) = \begin{pmatrix} 0{,}17\, e^{-j148{,}6^\circ} & 0{,}93\, e^{-j2{,}1^\circ} \\ 0{,}93\, e^{-j115{,}2^\circ} & 0{,}8\, e^{-j148{,}6^\circ} \end{pmatrix},$$

die offensichtlich falsch ist, wie die Überprüfung anhand von Gl. (3.66) zeigt:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 0{,}89,$$

$$|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1{,}51.$$

Eine Vielzahl weiterer gerechneter Beispiele zeigt, daß die Unitaritätsbedingung (3.65) immer dann nicht erfüllt ist, wenn ein Wellentyp $n < N$ unberücksichtigt bleibt. In allen anderen Fällen erfüllen die Elemente der Streumatrix die Gln. (3.66) in sehr guter Näherung, d.h. die Abweichung gegenüber Gln. (3.66a,b) ist in der Größenordnung von 1 ‰, gegenüber Gl. (3.66c) ungefähr ein Zehntelgrad.

3.5.4 Allgemeine Kriterien für verlustbehaftete Einsätze

Da Einsätze aus verlustfreiem Material eine Idealisierung darstellen, ist ein Kriterium zur Kontrolle der Ergebnisse bei verlustbehafteten Einsätzen von größerer Bedeutung. Eine hierzu geeignete Aussage macht das verallgemeinerte Reziprozitätstheorem für gyrotrope Medien [15]. Es besagt, daß Eingangsreflexionsfaktoren einer Mikrowellenschaltung mit Ferriteinsätzen unverändert bleiben, wenn das magnetisierende Gleichfeld umgepolt wird. Für die hier untersuchten Strukturen bedeutet dies, wenn im leeren Teil der Hohlleitung nur die H_{10}-Welle ausbreitungsfähig ist, nach Abschnitt 3.4.1, daß

$$S_{11} = S_{22} = S'_{11} = S'_{22} \tag{3.67}$$

gilt.[1] Diese Bedingung wird von der hier angewandten Berechnungsmethode nicht a priori erfüllt. So erhält man zum Beispiel für $N = M = 1$ im einfachen Fall eines halb-unendlichen Ferriteinsatzes $\big((T)$ und $(B) \equiv (0)\big)$ aus Gln. (3.36) und (3.43) für beide Magnetisierungsrichtungen

$$\begin{aligned} I_1 + R_1 &= v_{11} A_1, \qquad I_1 + R'_1 = w_{11} A'_1 , \\ Y_1(-I_1 + R_1) &= q_{11} A_1, \qquad Y_1(-I_1 + R'_1) = -u_{11} A'_1 . \end{aligned} \tag{3.68}$$

Aufgrund von Gl. (3.67) muß $R_1 = R'_1$ sein, und diese Forderung wird, wie eine kurze Rechnung zeigt, nur erfüllt, wenn

$$v_{11}u_{11} + w_{11}q_{11} = 0 \tag{3.69}$$

ist. Für den Fall eines isotropen Materialeinsatzes gilt nach Gln. (3.3 - 3.8)

$$e_1^v = e_1^r , \qquad h_1^v = -h_1^r , \tag{3.70}$$

---

1) Die in [20] veröffentlichten Ergebnisse erfüllen diese Forderung nicht und sind daher nicht korrekt.

so daß die Bedingung (3.69) nach Gln. (3.37) und (3.48) immer erfüllt ist. Für Materialeinsätze aus magnetisiertem Ferrit sind Gl. (3.70) und damit Gl. (3.69) im allgemeinen nicht zu erfüllen. Daher kann die Gleichheit der Reflexionsfaktoren S_{11} und S_{22} entsprechend Gl. (3.67) erst durch die Berücksichtigung von Wellentypen höherer Ordnung näherungsweise erreicht werden. In Abb. 8 ist der Betrag der Reflexionsfaktoren S_{11} und S_{22} für eine bestimmte Struktur in Abhängigkeit von der Zahl der zur Berechnung berücksichtigten Wellentypen dargestellt. Anhand der ausgezogenen Kurve wird deutlich, daß die Reflexionsfaktoren mit zunehmender Zahl der Wellentypen der Gl. (3.67) genügen.

Führt man wiederum die gleichen Rechnungen durch, läßt aber die Eigenwellen, die zu den Ausbreitungskonstanten

$$\gamma_2^v = 1{,}020 - j0{,}672\ [cm^{-1}], \quad \gamma_2^r = -1{,}065 - j0{,}116\ [cm^{-1}]$$

gehören, unberücksichtigt, so zeigt der Verlauf von $|S_{11}|$ und $|S_{22}|$ über K keine Konvergenz und die Kurven kommen nicht zur Deckung. Ähnliches gilt für die Phasen der Reflexionsfaktoren. Das an diesem Beispiel gezeigte Verhalten ist typisch und wurde in weiteren Beispielen bestätigt.

Die Vollständigkeit der gefundenen Eigenwellen der belasteten Hohlleitung ist also unabdingbare Voraussetzung für die Übereinstimmung der Reflexionsfaktoren S_{11} und S_{22}. Da diese durch Erhöhung der Zahl K der bei der Rechnung berücksichtigten Eigenwellen immer besser wird, ist sie zudem ein Kriterium für den Abbruch der unendlichen Gleichungssysteme und für die Konvergenz der Rechnung.

3.5.5 Die Erfüllung der Kantenbedingung

Die Gleichungssysteme (3.60), die als einzige von den hier entwickelten auf Strukturen der Abb. 4 anwendbar sind, nehmen insofern eine Sonderstellung ein, als zu ihrer Lösung die Zahl N der Eigenwellen in den unbelasteten Teilen der Hohlleitung nicht not-

wendigerweise gleich der Zahl M der Eigenwellen im belasteten Teil sein muß, und somit ein zusätzlicher Freiheitsgrad besteht. Bei der Lösung solcher Gleichungssysteme kann das Phänomen der relativen Konvergenz [21] auftreten, das eng mit der sogenannten Kantenbedingung [22] verknüpft ist. Die Lösungen können nämlich in Abhängigkeit vom Verhältnis M/N gegen verschiedene Werte konvergieren, so daß erst die Einhaltung der Kantenbedingung die richtige Lösung liefert.

Kanten eines Körpers sind die Unstetigkeitsstellen im Verlauf seiner Flächennormalen. Kanten, an denen das Feld unendlich werden kann, befinden sich für beide Strukturen (Abb. 1 und 4) an den Stellen z = 0,1 und x = ± δ/2. Denkt man sich um eine solche Kante als Achse einen Zylinder vom Radius r_o gelegt, dann verlangt die Kantenbedingung, daß der Energiestrom durch den Zylindermantel für $r_o \to 0$ verschwindet, d.h. daß

$$\mathrm{Re}\left\{ \int_F (\vec{E} \times \vec{H}^*)\, dF \right\} \to 0 \qquad \text{für } F \to 0 \tag{3.71}$$

wenn F die Oberfläche des Zylinders bedeutet. Die Kantenbedingung begrenzt also den Grad eines möglichen singulären Verhaltens der Felder bei Annäherung an die Kante. Im folgenden wird daher das Verhalten der Felder an Kanten entsprechend Abb. 9 untersucht und sodann gezeigt, wie dieses Verhalten die berechneten Streukoeffizienten beeinflußt.

Um die Felder E_y, E_φ und H_ρ in unmittelbarer Nähe einer Kante geeignet darzustellen, wird angenommen, daß diese die Achse eines Zylinderkoordinatensystems (ρ,φ,y) bildet, und daß sich die Feldkomponenten in der Umgebung der Kante (i = 1 Vakuum, i = 2 Ferrit) in der Form $f(\rho)\, g(\varphi)$ schreiben lassen. Für das elektrische Feld wird dann der Ansatz

$$E_y^{(i)} = \rho^\tau \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(i)}(\varphi)\, \rho^n \qquad i = 1,2 \tag{3.72a}$$

gemacht, mit dem aus den Maxwellschen Gleichungen die Komponenten

des magnetischen Feldes

$$H_\varphi^{(i)} = \rho^{\tau-1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(i)}(\varphi)\, \rho^n$$

$$H_\rho^{(i)} = \rho^{\tau-1} \sum_{n=0}^{\infty} K_n^{(i)}(\varphi)\, \rho^n \qquad i = 1,2 \qquad (3.72b,c)$$

folgen. Für den Augenblickswert der ρ-Komponente des Poyntingvektors erhält man

$$-S_\rho(t) = \mathrm{Re}\{E_y e^{j\omega t}\} \cdot \mathrm{Re}\{H_\varphi e^{j\omega t}\} \qquad (3.73a)$$

$$-S_\rho(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{E_y H_\varphi^*\} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{E_y H_\varphi e^{j2\omega t}\}. \qquad (3.73b)$$

Der Energiestrom P(t) durch eine die Kante einschließende Zylinderfläche ist gleich dem Integral von $S_\rho(t)$ über den Mantel F dieses Zylinders vom Radius r_o

$$P(t) = \iint_F S_\rho(t) \cdot \rho\, d\varphi\, dz. \qquad (3.73c)$$

Mit Gln. (3.72) erhält man unter Berücksichtigung jeweils nur der ersten Glieder der Reihen

$$P(t) \sim r_o^{2\tau'} \qquad \text{mit} \quad \tau' = \mathrm{Re}\{\tau\}. \qquad (3.74)$$

Da der Energiestrom für ein verschwindend kleines Volumenelement gegen Null gehen muß, folgt aus Gl. (3.74) die Bedingung

$$\mathrm{Re}\{\tau\} = \tau' > 0. \qquad (3.75)$$

Die Bestimmungsgleichung für τ erhält man, indem man mit Ansatz (3.72a) die Wellengleichung in den jeweiligen Gebieten löst und die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen für Kantenkonfigurationen nach Abb. 9 erfüllt.

Für eine Kante nach Abb. 9a ergibt sich [23]

$$-\frac{j\varkappa}{\mu_\perp \mu} + \frac{1}{\mu_\perp}\cot \tau \Phi_1 + \cot \tau(2\pi-\Phi_2) = 0 \qquad (3.76)$$

und für eine Kante nach Abb. 9b

$$\frac{\cos\left[\tau(2\pi-\Phi_1)\right]\cos\left[\tau\,\Phi_1\right] - 1}{\sin\left[\tau(2\pi-\Phi_1)\right]\sin\left[\tau\,\Phi_1\right]} = \frac{1}{2}\left[\mu_\perp + \frac{1}{\mu}\right] . \qquad (3.77)$$

Nach Gl. (3.75) liefern die Lösungen von Gln. (3.76) und (3.77) mit dem jeweils kleinsten positiven τ' die oberste zulässige Grenze des singulären Verhaltens der transversalen magnetischen Felder

$$H_\rho, H_\varphi = O(\rho^{-1+\tau'}) \quad \text{für} \quad \rho \to 0 \; ^{1)} . \qquad (3.78)$$

Bemerkenswert ist, daß für die Kante nach Abb. 9a die Werte von τ (Lösungen der Gl. (3.76)) im allgemeinen von der Richtung des magnetischen Gleichfeldes abhängen: Einerseits ändern sie infolge der ungeraden cot-Funktion bei Umkehr der Gleichfeldmagnetisierung ($\varkappa \to -\varkappa$) ihr Vorzeichen, andererseits ist, wenn τ_o eine bestimmte Lösung von Gl. (3.76) ist, $-\tau_o$ keine Lösung. Die Bestimmung von τ erfolgt durch numerische Lösung der Gln. (3.76) und (3.77).

Das so ermittelte singuläre Verhalten der transversalen magnetischen Feldkomponenten bestimmt das Abnehmen der Wellenamplituden mit wachsendem n. Befindet sich in der Ebene z = 0 eine Singularität für die

$$H_x, H_z = O\left(\rho^{-1+\tau'}\right) \quad \text{für} \quad \rho \to 0 \qquad (3.79)$$

ist, so dürfen die Beträge der Amplituden R_n der reflektierten Wellen nicht stärker als $n^{-1-\tau'}$ ansteigen [29], also

$$|R_n| = O\left(n^{-1-\tau'}\right) \quad \text{für} \quad n \to \infty . \qquad (3.80)$$

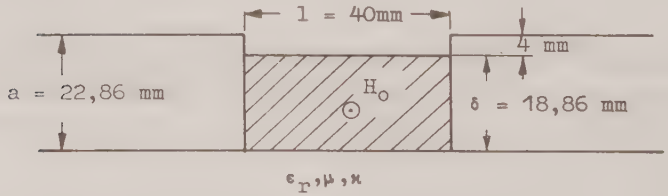
---

1) Lies: H_ρ, H_φ wachsen nicht stärker als $\rho^{-1+\tau'}$ für $\rho \to 0$.

Entsprechendes gilt für die Amplituden T_n der transmittierten Wellen in den Ebenen z = l. Für genügend hohes n sind die Wellentypen innerhalb der belasteten Hohlleitung bei endlicher Länge l so stark gedämpft, daß an den Stoßstellen z = 0 und z = l nur die Größen A_n bzw. B_n auftreten, für die dann ebenfalls die Gl. (3.80) gilt.

Der Einfluß des Verhältnisses M/N auf die Lösung und den Amplitudenabfall wird für ein Beispiel der Anordnung nach Abb. 4 untersucht. So erhält man für d = 4 mm, δ = 18,86 mm, δ+d = a = 22,86 mm und l = 40 mm mit den Materialdaten ε_r = 12,5-j0,005, μ = -2,1-j0,36 und $\varkappa$ = -1,47-j0,35 bei Anregung mit einer H_{10}-Welle der Frequenz 9,3 GHz in Abhängigkeit von N und M die folgenden Reflexionsfaktoren:

N	M	S_{11}	$S'_{11} = S_{22}$
40	40	-0,38648-j0,14576	-0,38640-j0,14570
40	36	-0,38652-j0,14559	-0,38645-j0,14551
40	32	-0,38641-j0,14513	-0,38646-j0,14515
40	20	-0,38673-j0,14451	-0,38674-j0,14451
40	16	-0,38685-j0,14538	-0,38642-j0,14552



Für die praktische Anwendung sind die Unterschiede der Ergebnisse vernachlässigbar klein. Jedoch zeigen sich deutliche und bemerkenswerte Unterschiede im Amplitudenabfall. Zunächst erhält man für die Kante bei z = 0 als Lösung von Gl. (3.76) bei positivem magnetischem Gleichfeld

$$\mathrm{Re}\{\tau_{0j}\} = 0{,}469.$$

Der Abfall der Amplituden muß daher nach Gl. (3.80) für genügend großes n mindestens wie $n^{-1,469}$ erfolgen.

In Abb. 10 sind die Beträge der Amplituden A_n^o (s. S. 13) für M = 20, 32, 40 und N = 40 im doppellogarithmischen Maßstab aufgetragen. Es wird deutlich, daß bei M = 20 und 32 der Abfall der Amplituden für $n \gtrsim 10$ dem durch die Kantenbedingung vorgeschriebenen entspricht. Für M = 40 dagegen zeigt der Abfall der Amplituden bei n = 34 einen deutlichen Sprung, so daß hier die Kantenbedingung verletzt wird. Das an diesem Beispiel gezeigte Verhalten wurde in ausführlichen Untersuchungen [23] an weiteren Anordnungen nach Abb. 4 bestätigt und führt zu folgenden Aussagen:

> Wird $M < N \frac{\delta}{a}$ gewählt, so entspricht der bei wachsendem n beobachtbare Abfall der Amplituden immer dem durch die Kantenbedingung vorgeschriebenen Verhalten.
>
> Wird $M > N \frac{\delta}{a}$ gewählt, so steigen die Amplituden der höheren Wellentypen wieder an. Obwohl dadurch die Kantenbedingung verletzt wird, ist der Einfluß dieses Ansteigens auf die Streukoeffizienten der H_{10}-Welle im allgemeinen vernachlässigbar gering (s. Tabelle S. 42).

Da die Lösungen von Gl. (3.76) von der Richtung des magnetischen Gleichfeldes abhängen, muß auch der Amplitudenabfall für beide Magnetisierungsrichtungen verschieden sein. Das in Abb. 11 gezeigte Beispiel zweier miteinander verbundener Hohlleitungen, von denen die mit der kleineren Breite mit Ferrit gefüllt ist, ist so gewählt, daß sich die Lösungen von Gl. (3.76) für die beiden Magnetisierungsrichtungen stark unterscheiden. Bei gleichen Reflexionsfaktoren $S_{11} = S'_{11}$ ist daher die Amplitudenabnahme deutlich verschieden, sie genügt aber in beiden Fällen dem durch die Kantenbedingung vorgeschriebenen Verhalten.

Für Strukturen nach Abb. 1 konvergieren, wie aus Tabelle 2 zu erkennen ist, die Lösungen des Gleichungssystems (3.60) für N = M gegen die gleichen Werte wie die Lösungen der Gleichungssysteme (3.47) und (3.36), die keinen zusätzlichen Freiheitsgrad haben.

Auch bei unterschiedlichen Verhältnissen M/N ($M \leq N$, s.S. 32) gehen die Ergebnisse für großes N jeweils gegen dieselben Werte. Relative Konvergenz tritt also nicht auf (Abb. 12). Die Beispiele in Abb. 13 bis 15 zeigen, daß die Kantenbedingung erwartungsgemäß nicht verletzt wird.

3.6 Bestimmung der Materialdaten über die Streumatrix

Bei Verwendung der beiden Strukturen in Abb. 1 und 4 zur Messung von Materialeigenschaften wird man den Frequenzbereich zweckmäßig so wählen, daß in den leeren Teilen der Hohlleitung nur die H_{10}-Welle ausbreitungsfähig ist und die Strukturen dann als Zweitor durch die drei Elemente $S_{11} = S_{22}$, S_{12} und S_{21} der Streumatrix beschrieben werden können. Zur Bestimmung der magnetischen Materialdaten μ und $\varkappa$ des magnetisierten Ferrits aus diesen Größen genügt die Kenntnis der beiden Übertragungsfaktoren oder eines Übertragungsfaktors und eines Reflexionsfaktors jeweils nach Betrag und Phase. Meßtechnisch einfacher ist das erste Verfahren, da bei ihm der Meßaufbau nicht verändert werden braucht, sondern lediglich das magnetisierende Gleichfeld umgepolt werden muß (s.S. 20).

Für die rechnerische Auswertung der Meßdaten bei einer Struktur nach Abb. 1 bietet sich die Formulierung nach Abschnitt 3.4.4 an, da sie einerseits die geringste Rechenzeit benötigt und zum anderen die Übertragungsfaktoren direkt, d.h. ohne vorherige Bestimmung der Reflexionsfaktoren, berechnen und somit geringe Rundungsfehler erwarten läßt. Bei einer Struktur nach Abb. 4 erfolgt die Berechnung nach Abschnitt 3.4.5. Zur Kontrolle der Rechnung können die Reflexionsfaktoren S_{11} und S_{22} auf Gleichheit geprüft werden. Aus den gemessenen Übertragungsfaktoren S_{12} und S_{21} können sodann die Materialdaten μ und $\varkappa$ wie folgt bestimmt werden[1]:

Mit geschätzten Werten $\mu^{(0)}$ und $\varkappa^{(0)}$ werden die Größen $S_{12}^{(0)}$ und $S_{21}^{(0)}$ berechnet und mit den gemessenen S_{12}- und S_{21}-Werten verglichen. Um die sich ergebenden Differenzen $|S_{12}^{(0)} - S_{12}|$ und $|S_{21}^{(0)} - S_{21}|$

---

1) Siehe auch Flußdiagramm Abb. 16.

unter die Größenordnung der Meßfehler zu bringen, geht man analog dem Newton-Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme [12] vor und erhält über das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} S_{12}^{(0)} - S_{12} \\ S_{21}^{(0)} - S_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\Delta S_{12}^{(0)}}{\Delta \mu^{(0)}} & \frac{\Delta S_{12}^{(0)}}{\Delta \varkappa^{(0)}} \\ \frac{\Delta S_{21}^{(0)}}{\Delta \mu^{(0)}} & \frac{\Delta S_{21}^{(0)}}{\Delta \varkappa^{(0)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^{(1)} - \mu^{(0)} \\ \varkappa^{(1)} - \varkappa^{(0)} \end{pmatrix} = (0) \qquad (3.81a)$$

oder in Matrizenform

$$\left(\Delta S^{(0)}\right) + \left(D^{(0)}\right)\left(\Delta M^{(0)}\right) = (0) \qquad (3.81b)$$

verbesserten Werte $\mu^{(1)}$ und $\varkappa^{(1)}$. Mit diesen wird das Verfahren wiederholt und so iterativ die zu den gemessenen Übertragungsfaktoren gehörenden Materialdaten bestimmt.

Um die Elemente der Matrix $(D^{(i)})$ zu erhalten, muß zweimal die Streumatrix berechnet werden, nämlich bei festem $\varkappa^{(i)}$ mit $\mu^{(i)}+\Delta\mu^{(i)}$ zur Bestimmung der Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta S_{12}^{(i)}}{\Delta \mu^{(i)}} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta S_{21}^{(i)}}{\Delta \mu^{(i)}}$$

und entsprechend bei festem $\mu^{(i)}$ mit $\varkappa^{(i)}+\Delta\varkappa^{(i)}$ zur Bestimmung von

$$\frac{\Delta S_{12}^{(i)}}{\Delta \varkappa^{(i)}} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta S_{21}^{(i)}}{\Delta \varkappa^{(i)}} .$$

Zusammen mit der Bestimmung von $S_{12}^{(i)}$ und $S_{21}^{(i)}$ würde also jeder Iterationsschritt die dreimalige Berechnung der Streumatrix erfordern. Der damit verbundene Rechenaufwand ließe sich nur bei stärkerer Reduzierung der berücksichtigten Wellentypen N in vertretbaren Grenzen halten. Es zeigt sich jedoch, daß eine neue

Berechnung der Matrix $(D^{(i)})$ bei jedem dritten Iterationsschritt vollkommen ausreichend ist, wodurch die Rechenzeit erheblich vermindert wird. Zudem ist beim Vorliegen einer zusammenhängenden Meßreihe von S_{12} und S_{21} als Funktion des statischen Magnetfeldes und der Frequenz die Abweichung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten μ und $\varkappa$ meist so gering, daß der Iterationsprozeß für neue Meßwerte S_{12} und S_{21} mit den davor bestimmten Materialdaten μ und $\varkappa$ als Näherungswerten starten kann. Folglich werden die Ausbreitungskonstanten nicht ausgehend von der leeren Hohlleitung (Flußdiagramm Abb. 5) bestimmt, und der Zyklus für die Berechnung der Matrix $(D^{(i)})$ bei jedem dritten Iterationsschritt braucht nicht unterbrochen zu werden. So werden z.B. bei 20 Werten einer Meßreihe 58 Iterationen und damit 19 mal die Berechnung der Matrix $(D^{(i)})$ erforderlich. Die Rechenzeit für die Auswertung einer solchen Meßreihe liegt bei ca. 30 sec pro Meßpunkt, wenn zur Berechnung N = 15 Eigenwellen berücksichtigt werden.

Die beschriebene Auswertung setzt die Kenntnis der Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$ voraus. Es ist jedoch prinzipiell möglich, durch eine Erweiterung des Verfahrens, z.B. durch zusätzliche Messung des Reflexionsfaktors S_{11}, alle drei komplexen Materialdaten μ, $\varkappa$ und ϵ_r zu bestimmen. Auch kann das Verfahren in entsprechend abgewandelter Form zur Ermittlung von ϵ_r bei Dielektrika [25] bzw. ϵ_r und μ_r bei Magnetika herangezogen werden.

Obgleich die hier angewandten Berechnungsmethoden den Abmessungen d, l, δ, a der beiden Strukturen in Abb. 1 und 4 keine prinzipiellen Grenzen setzen, ist es für die hier interessierende Ermittlung der Materialdaten sinnvoll, sich bei Strukturen nach Abb. 1 auf relativ dünne ($\delta/a < 1/5$) und lange ($l/\lambda_g > 1$) [1] Platten zu beschränken. Für dünne Platten ist nämlich das Aufsuchen der Ausbreitungskonstanten nach Abschnitt 3.2 besonders einfach und führt schnell zum Ziel. Bei zunehmender Länge der Platten wird außerdem der Einfluß der Stoßstellen auf die Übertragungsfaktoren geringer und bei deren Berechnung brauchen dementsprechend weniger Wellentypen berücksichtigt werden. Bei der praktischen Auswertung erwiesen sich Werte von $10 \leq N \leq 20$ als ausreichend, die auch hinsicht-

---

1) λ_g ist die Wellenlänge im leeren Teil der Hohlleitung.

lich der Rechenzeiten (Abb. 7) noch vertretbar sind. Bei Strukturen nach Abb. 4 sollte $l \ll a$ sein, damit die Meßgrößen nicht zu klein werden, wenn im Fall $\delta \approx a$ die Absorption zu groß wird oder im Fall $\delta \ll a$ allein aperiodische Felder auftreten.

4. Experimenteller Teil

4.1 Meßapparatur und Meßvorgang

Das Schaltbild der für die Messung der Übertragungsfaktoren verwendeten Mikrowellenapparatur ist in Abb. 17 dargestellt. Der Aufbau wurde im X-Band (Frequenzbereich 8,2 - 12,4 GHz) mit der dort üblichen Standardrechteckhohlleitung (Querschnitt 22,86 x 10,16mm^2) ausgeführt, die im genannten Frequenzbereich nur die Ausbreitung der H_{10}-Welle zuläßt. Das Mikrowellensignal wird von einem frequenzstabilisierten Reflexklystron erzeugt und auf den Referenz- und Meßzweig der Mikrowellenbrücke aufgeteilt. Im Meßzweig liegt die Hohlleitung mit dem zu untersuchenden Materialeinsatz. Die beiden Zweige sind über Einwegleitungen und 20 dB-Richtkoppler voneinander entkoppelt. Dies wurde überprüft, indem der zu messende Stoffeinsatz in der Hohlleitung in Längsrichtung verschoben wurde, wobei sich keine Änderung der Anzeige ergeben durfte. Über weitere Richtkoppler werden die beiden Signale schließlich dem Mischkopf eines Zweikanalüberlagerungsempfängers (Netzwerk-Analysator) zugeführt. Dieser zeigt das Amplitudenverhältnis (in Dezibel) und den Phasenunterschied (in Grad) zwischen Meß- und Referenzsignal an. Vor der Brücke wird ein Teil des Signals ausgekoppelt und einem Frequenzzähler und der Frequenzstabilisierung (AFC) zugeführt. Zur groben Einstellung der Frequenz läßt sich das Signal wahlweise auf einen Oszillographen schalten, auf dessen Schirm die Schwingbereiche des Klystrons und die Absorptionsmarke eines Wellenmessers sichtbar gemacht werden.

Der Nullabgleich der Mikrowellenbrücke erfolgt bei leerer Hohlleitung im Meßzweig, wodurch deren Aus- und Wiedereinbau zum Einbringen der jeweiligen Ferritplatte erforderlich wird. Durch einen

sehr starren Aufbau der Apparatur und zusätzliche Führungen an den Flanschen der Hohlleitung wurde erreicht, daß die Reproduzierbarkeit beim Aus- und Einbau besser als die Anzeigegenauigkeit des Netzwerkanalysators war, d.h. die Änderungen lagen unter 0,05 dB beim Betrag und unter $0{,}1^{\circ}$ bei der Phase.

Die so geeichte Brücke mißt nicht die Übertragungsfaktoren S_{ij} der ferritbelasteten Hohlleitung, sondern die durch die Ferritplatte verursachten zusätzlichen Phasendrehungen $(\varphi_{ij})_F$ und Dämpfungen $(a_{ij})_F$ gegenüber der leeren Hohlleitung. Man hat dann

$$\begin{aligned} \arc S_{ij} &= (\varphi_{ij})_F - \varphi_o = (\varphi_{ij})_F - k_z l, \\ -\ln |S_{ij}| &= a_{ij} = (a_{ij})_F + a_o \ , \end{aligned} \qquad (4.1a,b)$$

wobei φ_o und a_o Phasendrehung und Dämpfung der leeren Hohlleitung der Länge l bedeuten.

Ein weiteres experimentelles Problem ergibt sich aus der Forderung nach homogener Magnetisierung der Ferritplatte. Da diese nicht ellipsoidförmig ist, entsteht bei ihrem Einbringen in ein homogenes magnetisches Gleichfeld ein inhomogenes Entmagnetisierungsfeld, so daß das resultierende Gesamtfeld innerhalb der Platte ebenfalls inhomogen ist. Um trotzdem eine praktisch homogene Magnetisierung der Ferritplatte zu erreichen, wurde eine 200 mm lange Hohlleitung gebaut, bei der auf einer Länge von 100 mm die Breitseiten als Polschuhe aus Armco-Eisen ($\mu_{rmax} \approx 10\,000$) ausgebildet sind (Abb. 18). Damit wird erreicht, daß zwischen Polschuh und Ferritplatte im Idealfall kein Luftspalt auftritt, und damit das Feld innerhalb der Ferritplatte weitgehend homogen ist. Ein inhomogenes magnetisierendes Feld würde die in Abschnitt 3.1 gemachten Voraussetzungen verletzen und könnte zur Anregung von Wellentypen führen, die nicht zur Klasse der H_{no}-Wellen gehören. Das Vorhandensein solcher Wellentypen würde sich infolge ihrer kurzen Wellenlänge bei Variation des Gleichfeldes oder der Frequenz durch eng begrenzte Resonanzen im Verlauf von S_{ij} bemerkbar machen. Bei der experimentellen Untersuchung von drei Platten

aus Ferrit R1 mit den gleichen Abmessungen $\delta = l = 4$ mm, die zwecks guter Reproduzierbarkeit an der Hohlleitungswand angeordnet wurden, konnten keine solchen Effekte beobachtet werden. Die Differenzen in den Meßkurven für die drei Platten lagen in der Größenordnung der Anzeigegenauigkeit des Netzwerkanalysators. Auch durch die unvermeidbaren Inhomogenitäten innerhalb des Materials und die Toleranzen der mechanischen Bearbeitung wurden also keine höheren Wellentypen angeregt.

Die Homogenität des magnetischen Gleichfeldes war über die Breite der Hohlleitung und auf einer Länge von 93 mm besser als 2 %. Die maximal mögliche Länge wurde nicht ausgenutzt, um einen genügenden Abstand zwischen den Stoßstellen leere / belastete Hohlleitung und Messing-/Eisenwände(Abb. 18) zu haben. Zwar zeigte eine Vergleichsmessung an einer Messing-Hohlleitung gleicher Abmessungen, daß die Stoßstellen Eisen/Messing für die H_{10}-Welle ohne Einfluß sind; es ist jedoch nicht völlig auszuschließen, daß bei zu geringem Abstand zum Ferriteinsatz durch eine gegenseitige Beeinflussung beider Stoßstellen die Messungen über höhere Wellentypen verfälscht werden könnten.

Um das Einbringen der Proben zu erleichtern, besteht die Hohlleitung mit Polschuhen aus zwei Teilen, die längs der Schmalseite zusammengeschraubt werden. Das Justieren der Meßproben, d.h. die Einstellung des Abstandes d geschieht mit geschliffenen Endmaßen aus Messing. Probenhöhe und Hohlleitungshöhe waren so, daß beim Zusammenschrauben der beiden Hohlleitungsteile die Meßprobe festgeklemmt wurde. Erforderlichenfalls wurde etwas Klebstoff verwendet. Die Endmaße wurden nach Fixierung der Ferritplatte entfernt.

Die Messung des statischen Magnetfeldes erfolgt mit einer Hall-Sonde, zu deren Aufnahme ein schmaler Schlitz in die eine Seitenwand zwischen der Hohlleitung gefräst war (Abb. 18). Wie durch Messung festgestellt, herrscht dort das gleiche statische Magnetfeld wie am Ort des Ferriteinsatzes.

Da bei der hier interessierenden Anwendung des oben entwickelten Rechenverfahrens, nämlich der Messung der magnetischen Daten von

magnetisierten Ferriten, die Struktur nach Abb. 1 wegen ihrer leichter zu verändernden Geometrie besser geeignet ist als die nach Abb. 4, wurden die Messungen nur an dieser Konfiguration mit durchweg konstanter Hohlleitungsbreite ausgeführt

4.2 Meßgenauigkeit

Die Vielzahl der geometrischen Parameter (Abstand d, Dicke δ und Länge l) läßt eine allgemeine Fehlerabschätzung nicht zu. Es wäre jedoch möglich, den Einfluß der einzelnen in die Auswertung eingehenden Größen und damit die durch sie verursachten Unsicherheiten bei der Bestimmung der Eigenwerte μ_+ und μ_- für jeden Meßpunkt mit Hilfe der aufgestellten Programme zu untersuchen.

Um den Rechenaufwand gering zu halten, beschränkt sich die folgende Fehlerabschätzung auf dünne ($\delta < 1$ mm) und lange ($l > 60$ mm) Platten aus Magnesium-Mangan-Ferrit (R1 der Firma Indiana General, Keasby, New Jersey), an denen die im nächsten Abschnitt (4.3) beschriebenen Messungen durchgeführt wurden. Die angegebenen Unsicherheiten beziehen sich dabei auf Werte in der Umgebung der ferrimagnetischen Resonanz (Maximum von μ_+''), die von besonderem Interesse sind. Da die Bestimmung des Real- oder Imaginärteils der Eigenwerte $\mu_+ = \mu_+' - j\mu_+''$ und $\mu_- = \mu_-' - j\mu_-''$ hier nicht unabhängig voneinander aus getrennten Meßgrößen erfolgen kann, wird bei der Fehlerbetrachtung der Fehler auf die Beträge $|\mu_+|$ und $|\mu_-|$ der Eigenwerte bezogen.

Ein prinzipiell nicht vermeidbarer Fehler ist im Verfahren der Vergleichsmessung zur leeren Hohlleitung begründet. In die Rechnung geht nur die Dämpfung infolge des Ferriteinsatzes ein. Die geringe Dämpfung der leeren Hohlleitung aufgrund metallischer Verluste ($\approx 0{,}003$ dB/cm) wird zwar bei Abgleich der Brücke berücksichtigt, vernachlässigt wird indessen die Änderung der metallischen Verluste infolge der durch den Ferriteinsatz veränderten Wandströme. Analog gilt auch für die Phasenmessung, daß eine mögliche zusätzliche Phasendrehung aufgrund der veränderten Wandströme unberücksichtigt bleibt. Wegen der hohen metallischen

Leitfähigkeit kann man indessen davon ausgehen, daß sich diese Effekte auf das Meßergebnis nicht auswirken. Ansonsten begrenzen das angewandte Meßverfahren und die zur Verfügung stehenden Meßgeräte die Meßgenauigkeit aufgrund folgender Unsicherheiten:

Die Frequenzstabilität des Klystronsenders wurden mit einem Frequenzzähler überwacht. Die Schwankungen lagen während einer Meßreihe bei maximal ± 5 kHz. Derart kleine Frequenzabweichungen wirken sich weder bei der Messung noch auf die Rechnung aus.

Das statische Magnetfeld wurde mit einem kommerziellen Gaußmeter (3 % Fehler) gemessen. Da ein Eigenwert $\mu_{\pm}(H_o)$ aus den Messungen für positive und negative Gleichfeldmagnetisierung gewonnen wird, ist für die Auswertung weniger die absolute Genauigkeit von Bedeutung, die natürlich eine Verschiebung der Kurven $\mu_{\pm} = f(H_o)$ bewirken kann, als vielmehr die genaue Einstellung des gleichen Feldbetrages für die beiden entgegengesetzten Richtungen. Um insoweit unabhängig vom Gaußmeter zu sein, wurden über einen zusätzlichen Mischerkopf (in Abb. 17 aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt) die Reflexionsfaktoren der Struktur gemessen. Da diese für beide Magnetisierungsrichtungen dieselben sind (s.Abschnitt 3.5.4), kann das jeweils entgegengesetzt gleiche Magnetfeld über die Messung der Reflexionsfaktoren eingestellt werden.

Die Breite der gefrästen Meßhohlleitung (Abb. 18) betrug nach der Fertigstellung a = 22,90 ± 0,01 mm. Die aus dieser Toleranz bei der Auswertung resultierenden Abweichungen für $|\mu_{\pm}|$ liegen unter 1 %.

Die Dielektrizitätszahl ϵ_r des Materials wurde nach einem Störungsverfahren (z.B. [26]) an Stäben von 2 mm Durchmesser in einem quaderförmigen H_{103}-Resonator gemessen. Der sich aus sechzehn Messungen ergebende Mittelwert und die Standardabweichung (z.B. [27]) waren

$$\epsilon_r = (12{,}5 \pm 0{,}2) - j(0{,}015 \pm 0{,}002).$$

Der Fehler, verursacht durch die Meßungenauigkeit der Dielektrizitätszahl, wird im allgemeinen mit zunehmendem Wandabstand d

größer und hängt auch vom Betrag von $\mu_\perp$ (s. Gln. (2.6) und (2.7)) ab. Für die hier gemachten Messungen ($0 < d \leq 3$ mm) liegt der Fehler unter 5 %. Für frequenzabhängige Messungen von μ und $\varkappa$ wurde ε_r als konstant angenommen.

Die Ferritplatten und die zum Einstellen des Abstandes d dienenden Endmaße wurden auf einer Präzisionsflächenschleifmaschine hergestellt. Die Toleranz der linearen Abmessungen liegt bei 0,01 mm. Für $l > 60$ mm führt diese Unsicherheit in der Länge zu einem Fehler von ca. 2 %. Die Unsicherheit der Dicke δ wirkt sich bei der Berechnung von $|\mu_\pm|$ in einer Streuung von

ca. 12 % bei δ = 0,4 mm und

ca. 5 % bei δ = 1,0 mm

aus.

Beim Einstellen des Abstandes d ist nachteilig, daß diese Größe nach Einbringen der Meßprobe nicht direkt gemessen werden kann. Der Einfluß der Unsicherheit von d auf die Bestimmung von $\mu_\pm$, der bei den hier untersuchten Konfigurationen mit wachsendem Abstand d und wachsender Dicke δ abnimmt, liegt bei 8 %.

Die Genauigkeit der Brücke mit Netzwerkanalysator lag für die Betragmessung bei ± 0,1 dB im Bereich von 0 bis -3 dB, bei stärkerer Dämpfung bei ± 0,3 dB. Der Fehler bei der Phasenmessung betrug durchweg $0{,}3^\circ$. Die Meßgrenze liegt bei etwa -60 dB. Bei den frequenzabhängigen Messungen war die zur Verfügung stehende Leistung bei den hohen Frequenzen ($f > 11{,}5$ GHz) nicht groß genug, so daß dort die Fehler bis zu ± 0,5 dB und $\pm 0{,}7^\circ$ sein können. Der Einfluß dieser Meßunsicherheiten läßt sich für jeden Meßpunkt anhand des in Abschnitt 3.6 beschriebenen Rechenprogramms angeben, da in diesem die Differenzenquotienten $\Delta S_{ij}/\Delta\mu$ und $\Delta S_{ij}/\Delta\varkappa$ (s. Gln. (3.81)) bestimmt werden.

Geht man davon aus, daß die Meßfehler unabhängig voneinander sind, so errechnet sich der zu erwartende Standardfehler (z.B. [28]) der Größen $|\mu_+|$ und $|\mu_-|$ der hier gemachten Messungen (s. Abschnitt 4.3) zu

ca. 16 % bei δ = 0,4 mm und

ca. 12 % bei δ = 1,0 mm.

Wie schon erwähnt, gilt diese Fehlerabschätzung für die Werte in der Umgebung der ferrimagnetischen Resonanz (Maximum von μ_+''). Der Fehler ist kleiner in dem Bereich, in dem die Meßgrößen S_{ij} Resonanzerscheinungen zeigen. Dieser Bereich liegt bei der feldabhängigen Darstellung unterhalb der Resonanzfeldstärke, in der frequenzabhängigen Darstellung oberhalb der Resonanzfrequenz. Hier tritt bei der Auswertung der Meßergebnisse in der Umgebung der ferrimagnetischen Resonanz dieselbe Problematik auf, wie man sie von den Messungen an kleinen Kugeln im Resonator und der nachfolgenden Umrechnung der "äußeren Permeabilität" [3] in die Materialeigenschaften seit langem kennt.

Wenn man sich auf den Bereich der ferrimagnetischen Resonanz beschränkt, läßt sich die Meßgenauigkeit dort erhöhen durch

a) Verwendung dickerer Platten, die zu stärkeren Meßeffekten führen. Die Bestimmung der Ausbreitungskonstanten γ_n in Abhängigkeit von H_o oder f ist für $\delta \approx 1 - 3$ mm noch nicht sehr aufwendig (s. z.B. Tab. 3).

b) Vergrößern der Länge l. Hier bestehen die Grenzen durch die mechanische Bearbeitung des Materials und durch die Ausdehnung des zur Verfügung stehenden homogenen Bereichs des magnetischen Gleichfeldes. Größere l-Werte führen bei der Berechnung der Übertragungsfaktoren zu keinem weiteren Aufwand (s. Abschnitt 3.4.1).

Allerdings können diese Maßnahmen zur Vergrößerung des Meßeffektes im Bereich der ferrimagnetischen Resonanz auch dazu führen, daß dort, wo die Meßgrößen S_{ij} Resonanzerscheinungen zeigen, der Meßbereich des Netzwerkanalysators ($\approx$ -60 dB) unterschritten wird. Eine lückenlose Darstellung der Kurven $\mu_\pm = f(H_o)$ oder $\mu_\pm = f(f)$ durch Messung an e i n e r Ferritplatte ist dann nicht mehr möglich. Dicke und Länge der Platten wurden daher so gewählt, daß $|S_{12}|$ und $|S_{21}|$ den Wert von -60 dB nicht unterschritten.

4.3 Meßergebnisse

Einleitend soll am einfacheren Beispiel eines dielektrischen Einsatzes gezeigt werden, daß die Meßgrößen $|S_{12}|$ und $(\varphi_{12})_D$ auch bei konstanten Materialdaten in Abhängigkeit von der Frequenz einen recht komplizierten Verlauf haben können. Abb. 19 macht dies für einen Hartgewebeeinsatz (Neolit der Firma Dynamit Nobel, Troisdorf) deutlich. Auffallend ist das Minimum von $|S_{12}|$ im Bereich von 11 GHz, das mit dem Maximum der Absorption im Material zusammenfällt. In diesem Frequenzbereich geht die H_{20}-Welle der belasteten Hohlleitung vom aperiodischen Feld zur ausbreitungsfähigen Welle über[1]: Ihre Wellenlänge ändert sich von 18 cm bei $f \approx 10{,}6$ GHz auf 7 cm bei $f \approx 11{,}2$ GHz, bei gleichzeitiger Abnahme der Dämpfungskonstante von $|\alpha_2| = 0{,}2\ [cm^{-1}]$ auf $|\alpha_2| = 0{,}07\ [cm^{-1}]$. Das Minimum von $|S_{12}|$ und das damit verbundene Absorptionsmaximum bei $f \approx 11$ GHz läßt sich daher durch eine H_{202}-Resonanz erklären. Erwähnenswert ist noch, daß für diese Hohlleitungsstruktur die H_{10}-Welle oberhalb von 10,86 GHz stärker gedämpft ist als die H_{20}-Welle. Die in den unteren Teilbildern von Abb. 19 dargestellte Auswertung macht deutlich, daß bei relativ dicken und langen Einsätzen ε_r' und ε_r'' mit hoher Genauigkeit bestimmt werden können.

Die Messungen der Übertragungsfaktoren für verschiedene ferrimagnetische Einsätze in Abhängigkeit vom magnetisierenden Gleichfeld ($0{,}5 \cdot 10^5$ A/m $\leq H_0 \leq 3{,}5 \cdot 10^5$ A/m) sind in Abb. 20 bis 25 wiedergegeben. Die Auswertung dieser Messungen mit dem im Abschnitt 3.6 beschriebenen Rechenprogramm nach den Eigenwerten μ_+ und μ_- ist in den Abb. 26 bis 31 dargestellt. Typisch und auch von anderen Meßverfahren her bekannt [1,2,3,4] ist die oben schon erwähnte Verschiebung zwischen den Resonanzerscheinungen bei den Meßgrößen S_{ij} und denen im Verlauf der Materialdaten μ_+', μ_+''. Diese Verschiebung kommt durch den entmagnetisierenden Einfluß des Wechselfeldes zustande. Sie kann für unendlich lang angenommene und extrem dünne Ferriteinsätze, bei denen sich das magnetische Wechselfeld innerhalb des Querschnitts des Ferrits nicht ändert,

---

1) Die beiden Fälle sind hier im Sinne einer Näherung zu verstehen, da sie wegen des verlustbehafteten Materials nicht streng zu trennen sind.

über die Näherungen von Gln. (2.8) oder (2.10) mit den Entmagnetisierungsfaktoren des Ferriteinsatzes korrelliert werden. Bei den hier vermessenen Platten endlicher Länge der Dicken $\delta \geq 0{,}4$ mm ist indessen das magnetische Wechselfeld innerhalb des Plattenquerschnitts nicht konstant, und daher ein geschlossener Ausdruck für die oben beschriebene Feld- oder Frequenzverschiebung nicht angebbar.

Um wenigstens zu einem qualitativen Verständnis des gemessenen Kurvenverlaufes der Übertragungsfaktoren zu kommen, wird im folgenden noch der Verlauf der Ausbreitungskonstanten der ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld untersucht. Da diese unabhängig von der Länge sind, und daher keine "Längenresonanzen" auftreten können, wird ein einfacherer und damit leichter durchschaubarer Verlauf erwartet. Bei der Auswertung der Meßdaten fallen die komplexen Ausbreitungskonstanten $\gamma_n = \alpha_n + j\beta_n = f(H_o)$ aller in der Rechnung berücksichtigten Eigenwellen an. In Abb. 32 sind sie für die schwach gedämpften Wellentypen der Struktur nach Abb. 24 dargestellt. Bei der Diskussion dieser Kurven im Zusammenhang mit den gemessenen Übertragungsfaktoren ist zu beachten, daß die gegenseitige Beeinflussung der beiden Stoßstellen und damit der Verlauf der Übertragungsfaktoren bei genügend langen Stoffeinsätzen im wesentlichen durch den Wellentyp mit der jeweils niedrigsten Dämpfungskonstante bestimmt werden. Auch wenn andere Wellentypen an den Stoßstellen stärker angeregt werden, d.h. dort eine höhere Amplitude haben, so wird wegen der exponentiellen Abnahme der Feldgrößen in ausreichendem Abstand praktisch nur der Wellentyp mit der geringsten Dämpfung überwiegen. Ein Vergleich von Abb. 24 und 32 macht deutlich, daß die beiden Minima der Kurve $|S_{21}| = f(H_o)$ bei den gleichen Feldstärkewerten liegen wie die beiden Maxima der Dämpfungskonstanten $\alpha_1^v = f(H_o)$ der H_{10}-Welle, die von allen vorlaufenden Wellen in diesem Bereich die geringste Dämpfung aufweist. Das Minimum der Kurve $|S_{12}| = f(H_o)$ bei $H_o \approx 2{,}1 \cdot 10^5$ A/m (Abb. 24) läßt sich wie folgt erklären. Die Dämpfungskonstanten der rücklaufenden H_{10}- und H_{20}-Welle sind für $H_o \approx 2{,}2 \cdot 10^5$ A/m gleich, unterhalb dieses Feldwertes ist die H_{20}-Welle, oberhalb die H_{10}-Welle schwächer gedämpft. Bei gleicher Amplitude von

H_{10}- und H_{20}-Welle würde man daher ein Minimum des Übertragungsfaktors bei $H_o \approx 2{,}2 \cdot 10^5$ A/m erwarten. Wegen der tatsächlich unterschiedlichen Anregung beider Wellentypen liegt es etwas unterhalb dieses Feldwertes.

Den Einfluß des Abstandes d des Ferriteinsatzes von der Hohlleitungswand bei sonst unveränderten Parametern verdeutlichen die Abb. 21 bis 23. Sowohl die nichtreziproke Phasenverschiebung $\left((\varphi_{12})_F - (\varphi_{21})_F\right)$, als auch die nichtreziproke Dämpfung $\left(|S_{12}| - |S_{21}|\right)$ nehmen im betrachteten Bereich mit dem Abstand d zur Hohlleitungswand zu. Besonders ausgeprägt ist dieses nichtreziproke Verhalten für d = 3 mm. In diesem Fall ist die Abhängigkeit des gemessenen Übertragungsfaktors von der magnetischen Gleichfeldstärke für die eine Magnetisierungsrichtung sehr gering, für die andere sehr stark. Das läßt den Schluß zu, daß im ersten Fall der Übertragungsfaktor wesentlich von dem praktisch feldunabhängigen Eigenwert μ_-, im zweiten Fall hauptsächlich durch den Eigenwert μ_+ beeinflußt wird. Hier treten also an einer Platte der Dicke δ = 0,6 mm ähnliche Verhältnisse auf, wie sie näherungsweise durch Gl. (2.10) im Sonderfall sehr dünner Platten am Ort zirkular polarisierten magnetischen Wechselfeldes beschrieben werden.

Die Übereinstimmung der ausgewerteten Meßergebnisse (Abb. 26 bis 31) liegt in der Umgebung der ferrimagnetischen Resonanz im Rahmen der angegebenen Meßunsicherheit. Über die Meßfehler hinausgehende Abweichungen gegenüber den Ergebnissen von [3] und [4] können auf die bei polykristallinen Ferriten üblichen Streuungen der Materialdaten zurückgeführt werden, da der hier verwendete R1-Ferrit aus einer anderen Lieferung stammt. Darauf deutet auch die gegenüber [4] unterschiedliche Dielektrizitätszahl (s. Abschnitt 4.2) hin. Die gemessene Feldabhängigkeit von μ_+'' zeigt den bei Ferriten bekannten unsymmetrischen Verlauf [1,2,3,4] mit dem steileren Abfall von μ_+'' auf der Hochfeldseite. Dieser Befund der Resonanzkurven erklärt sich aus der Lage der Eigenfrequenz der gleichförmigen Spinpräzession im Spinwellenspektrum [29,3].

Die Messungen der Übertragungsfaktoren für verschiedene ferrimagnetische Einsätze in Abhängigkeit von der Frequenz sind in Abb. 33 bis 37 wiedergegeben. Sie wurden bei konstantem magnetischen Gleichfeld $H_o = 2{,}865 \cdot 10^5$ A/m durchgeführt und dabei die Frequenz ausgehend von f = 9,29 GHz in Schritten von ca. 150 MHz verändert. Die daraus sich ergebenden Eigenwerte $\mu_+(f)$ und $\mu_-(f)$ zeigen die Abb. 38 bis 42. Wie am Beispiel eines dielektrischen Einsatzes am Anfang dieses Abschnitts gezeigt wurde, kann die Frequenzabhängigkeit der Übertragungsfaktoren schon bei konstanten Materialdaten recht kompliziert sein. Da sich bei einem magnetisierten Ferrit die magnetischen Materialdaten μ'_+ und μ''_+ mit der Frequenz stark ändern, ist es nicht verwunderlich, wenn die gemessenen Übertragungsfaktoren (Abb. 33 bis 37) noch unübersichtlicher verlaufen. Sie lassen sich im Einzelfall wiederum anhand der Ausbreitungskonstanten $\gamma_n = f(f)$ diskutieren. Dazu sind in Abb. 43 die aus der Messung in Abb. 36 sich ergebenden Ausbreitungskonstanten $\gamma_1^{v,r}$ und $\gamma_2^{v,r}$ in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Die Minima von $|S_{21}|$ und $|S_{12}|$ in Abb. 36 lassen sich wie oben erklären. Bei den vorlaufenden Wellen sind für $f \approx 11{,}26$ GHz die Dämpfungskonstanten von H_{10}- und H_{20}-Welle gleich: $\alpha_1^v = \alpha_2^v \approx 0{,}16$. Das Minimum von $|S_{21}|$ liegt bei $f \approx 11{,}25$ GHz. Das Minimum von $|S_{12}|$ bei $f \approx 10{,}35$ GHz kann ganz analog aus dem Dämpfungsverhalten der rücklaufenden H_{10}- und H_{20}-Welle erklärt werden. Weiter erkennt man, daß die Kurven für $\gamma_2^r(f) = \alpha_2^r(f) + j\beta_2^r(f)$ und $\gamma_2^v(f) = \alpha_2^v(f) + j\beta_2^v(f)$ fast spiegelbildlich zur Geraden $\gamma_n = 0$ liegen. Die nichtreziproken Eigenschaften dieser Struktur werden daher im wesentlichen durch die vor- und rücklaufende H_{10}-Welle bestimmt, deren Ausbreitungskonstanten sich durch die Spiegelung an $\gamma_n = 0$ nicht zur Deckung bringen lassen.

Die Eigenwerte $\mu_+(f)$ und $\mu_-(f)$ stimmen wiederum innerhalb der angegebenen Meßunsicherheit überein. Wie aufgrund des Dämpfungsmechanismus durch die Spinwellen zu erwarten, ist hier, im Gegensatz zu den feldabhängigen Kurven, der Verlauf von $\mu''_+(f)$ oberhalb der ferrimagnetischen Resonanz weniger steil als unterhalb. Abschließend sind in einer Tabelle die Resonanzfeldstärken und -frequenzen (μ''_+ maximal) sowie die jeweiligen Halbwertsbreiten von μ''_+ zusammengestellt.

Messung	Resonanz-feldstärke H_r	Halbwerts-breite ΔH	Messung	Resonanz-frequenz f_r	Halbwerts-breite Δf
Abb.	[10^5 A/m]	[10^5 A/m]	Abb.	[GHz]	[GHz]
	f = 9,29 GHz			$H_o = 2{,}865 \cdot 10^5$ A/m	
20, 26	2,825	0,25	33, 38	9,368	1,04
21, 27	2,840	0,275	34, 39	9,375	0,94
22, 28	2,833	0,28	35, 40	9,355	0,99
23, 29	2,837	0,26	36, 41	9,387	1,06
24, 30	2,817	0,26	37, 42	9,373	0,96
25, 31	2,841	0,28			
Mittel-werte	2,832	0,267		9,371	0,998

Berechnet man mit Hilfe der Beziehung $\omega = \gamma H_r$ den γ-Wert des untersuchten R1-Ferrits, so ergibt sich aus $H_r = 2{,}832 \cdot 10^5$ A/m und f = 9,29 GHz für $\frac{\gamma}{2\pi} = 32{,}8 \frac{\text{kHz}}{\text{A/m}}$, aus $f_r = 9{,}371$ GHz und $H_o = 2{,}865 \cdot 10^5$ A/m für $\frac{\gamma}{2\pi} = 32{,}7$. Bildet man das Verhältnis der Halbwertsbreiten Δf und ΔH, so ergibt sich der Wert 37,4 $\frac{\text{kHz}}{\text{A/m}}$. Wie wegen der Abweichungen der μ_+''-Kurven vom lorentzförmigen Verlauf und damit einer frequenzabhängigen Dämpfung der Spinpräzession nicht anders zu erwarten, stellt der aus der Bewegungsgleichung der gleichförmigen Präzession folgende Zusammenhang $\Delta f = \frac{\gamma}{2\pi} \Delta H$ nur eine grobe Näherung dar.

5. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Bestimmung der Materialdaten von magnetisierten Mikrowellenferriten in Abhängigkeit von der Frequenz angegeben. Dazu werden zwei nichtreziproke Hohlleitungsstrukturen untersucht: Eine Rechteckhohlleitung mit einer Ferritplatte endlicher Länge und der sprunghafte Übergang auf ein ferritgefülltes Hohlleitungsstück kleinerer Breite. In beiden Fällen ist die eindeutige Bestimmung der Eigenwerte des

Permeabilitätstensors über die Übertragungsfaktoren möglich.

Die Berechnung der Streumatrix erfolgt mit der Methode der Entwicklung nach Eigenfunktionen. Die verschiedenen linearen Gleichungssysteme, die sich aus dem Entwicklungssatz durch Anwendung der Orthogonalitäts- und/oder Biorthogonalitätsbeziehungen zwischen den Eigenfunktionen der leeren und belasteten Hohlleitung ergeben, werden diskutiert und mit der Lösung entsprechend dem Konzept der verallgemeinerten Streumatrix verglichen. Für die Struktur mit der sprunghaften Änderung der Leitungsquerschnittsfläche ist nur eine Form der Entwicklung, für die andere Struktur sind alle vier Formen anwendbar. Für letztere konvergieren die numerischen Ergebnisse bei Abbruch der verschiedenen Gleichungssysteme jeweils gegen den gleichen Wert, so daß hier die hinsichtlich der Rechenzeit günstigste Form gewählt werden kann.

Die Einhaltung der Kantenbedingung wird für beide Strukturen überprüft. Daraus ergibt sich nur für die Struktur mit der sprunghaften Änderung des Leitungsquerschnitts eine zusätzliche Bedingung: Danach darf das Verhältnis der bei der Berechnung berücksichtigten Eigenwellen der leeren zu denen der gefüllten Hohlleitung einen durch den Querschnittsprung bestimmten Wert nicht überschreiten.

Es wird ferner gezeigt, daß die Gleichheit der Reflexionsfaktoren für beide Magnetisierungsrichtungen, wie sie das verallgemeinerte Reziprozitätstheorem für gyrotrope Medien fordert, bei der Rechnung erst durch Berücksichtigung einer ausreichend hohen Zahl von Wellentypen erreicht wird und somit ein Kriterium für den Abbruch der Gleichungssysteme darstellt.

Die Messung der Übertragungsfaktoren in Abhängigkeit sowohl von der Gleichfeldstärke als auch von der Frequenz und ihre Auswertung zeigen, daß die so für verschiedene Proben erhaltenen Materialwerte im Rahmen der angegebenen Genauigkeit übereinstimmen. Der Vorteil des hier entwickelten Verfahrens liegt darin, daß wegen der Hohlleitungsstruktur Wobbelmessungen sowohl über das magnetische Gleichfeld als auch über die Frequenz möglich sind. Eine Erweiterung des Verfahrens könnte darin bestehen, durch zusätzliche

Messung des Reflexionsfaktors auch die Dielektrizitätszahl des Ferrits zu bestimmen.

Das angegebene Berechnungsverfahren für die untersuchten Strukturen ist auch zum Entwurf von Hohlleitungselementen, die sich durch Stoffeinsätze realisieren lassen, wie z.B. Phasenglieder, Abschwächer, Richtungsleitungen oder Gyratoren, geeignet.

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1971 bis 1974 am Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum. Herrn Prof. Dr. Hans Severin bin ich für die Förderung der Arbeit und viele wertvolle Anregungen und Hinweise zu Dank verpflichtet.

Literaturverzeichnis

[1] Artmann, J., Tannenwald, P.
Microwave susceptibility measurements in ferrits,
J. Appl. Phys., 25(1955), S. 1124

[2] Spencer, E.G., Lecraw, R.C., Reggia, F.
Measurements of microwave dielectric constants and tensor permeabilities of ferrite spheres,
IRE Conv. Rec., 8(1955), S. 113-121

[3] Bogun, H., Severin, H.
Der Suszeptibilitätstensor polykristalliner Ferrite, Messung seiner Eigenwerte an verschiedenen Rotationsellipsoiden,
Z.f.angew.Physik, 32(1971), S. 225-235

[4] Entschladen, H., Severin, H.
Messung der Eigenwerte des Permeabilitätstensors von Ferriten an Stäben in der Rundhohlleitung,
AEÜ, 27(1973), S. 153-161

[5] Lax, B., Button, K.J., Roth, L.M.
Ferrite Phase Shifters in Rectangular Wave Guide,
J. Appl. Phys., 25(1954), S. 1413-1421

[6] Sensisper, S.
Resonance Loss Properties of Ferrites in 9 Gc Region,
Proc. IRE 44(1956), S. 1334

[7] Wexler, A.
Solution of Waveguide Discontinuities by Model Analysis,
IEEE, Trans. MTT-15 (1967), S. 508-517

[8] Piefke, G.
Die Anwendung der Entwicklung nach Eigenfunktionen auf Beugungsprobleme in endlichen Gebieten,
AEÜ, 22(1968), S. 275-281

[9] Collin, R.E.
Field Theory of Guided Waves,
McGraw-Hill, New York 1960, S. 198-209

[10] Bresler, A.D., Joshi, G.H., Marcuvitz, N.
Orthogonality Properties for Modes in Passive and Active Uniform Wave Guides,
J. Appl. Phys., 29(1958), S. 794–799

[11] Villeneuve, A.I.
Orthogonality Relationships for Waveguides and Cavities with Inhomogeneous Anisotropic Media,
IRE, Trans. Microwave Theory and Techniques,
MTT-7 (1959), S. 441-446

[12] Zaguskin, V.L.
Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations,
Oxford 1961

[13] Collin, R.E.
a.a.O., S. 174–179

[14] Collin, R.E.
a.a.O., S. 229-232

[15] Harrington, R.F., Villeneuve, A.I.
Reciprocity Relationships for Gyrotropic Media,
IRE, Trans.Microwave Theory and Techniques,
MTT-6 (1958), S. 308-310

[16] Mittra, R., Lee, S.W.
Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves,
Macmillan, New York, S. 207-211

[17] Klein, W.
Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen,
Teil 1: Mehrtortheorie,
Akademie Verlag, Berlin 1970

[18] Chaloupka, H.
Berechnung der Streumatrix von Rechteckhohlleitungen mit dielektrischen und ferrimagnetischen Stoffeinsätzen über die verallgemeinerten Leitungsgleichungen,
Dissertation, Bochum, 1975

[19] Westlake, J.R.
A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations,
J. Wiley, New York, 1968

[20] Nikolskiy, V.V., Korniyenko, D.I., Kotik, I.P.
Calculation of Scattering Matrix of a Waveguide Transformer Containing a Ferrite Transverse Magnetization,
Radio Eng. Electron. Phys., 13(1968), S. 1905-1916

[21] Mittra, R., Lee, S.W.
a.a.O., S. 38-42

[22] Jones, D.S.
The Theory of Electromagnetism,
Macmillan, New York, 1964, S. 562-569

[23] Fasholz, J.
Untersuchung der "relativen Konvergenz" bei Lösungen von Streuproblemen in Rechteckhohlleitungen, die mit Magnetika gefüllt sind,
Diplomarbeit, Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik, Ruhr-Universität, Bochum 1974

[24] Mittra, R., Lee, S.W.
a.a.O., S. 33

[25] Fasholz, J.
Hohlleitungsmeßverfahren zur Bestimmung von relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_r,
Arbeit im Labor, Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik, Ruhr-Universität, Bochum 1973

[26] Sucher, M., Fox, J.
Handbook of Microwave Measurements, Vol. II,
Wiley, New York 1963, S. 495-546

[27] Squires, G.L.
Meßergebnisse und ihre Auswertung,
Walter de Gruyter, Berlin 1971, S. 40

[28] Squires, G.L.
a.a.O., S. 46-49

[29] Vrehen, Q.H.F.
Absorption and Dispersion in Porous and Anisotropic Polycristalline Ferrites at Microwave Frequencies, IEEE Trans. Mag., 4(1968), S. 479-480

Liste haufig verwendeter Formelzeichen

a	Hohlleitungsbreite
a_o	Dämpfung der leeren Hohlleitung der Länge l
a_F	Dämpfung durch Ferriteinsatz der Länge l
b	Hohlleitungshöhe
d	Abstand Hohlleitungswand/Ferritplatte
e_n	transversale Verteilung des elektrischen Feldes der n-ten Eigenwelle der belasteten Hohlleitung
$\vec{E} = \vec{u}_x E_x + \vec{u}_y E_y + \vec{u}_z E_z$	Phasor der elektrischen Feldstärke
f	Frequenz
F	Querschnittsfläche der Hohlleitung
h_n	transversale Verteilung des magnetischen Feldes der n-ten Eigenwelle der belasteten Hohlleitung
H_o	statisches Magnetfeld
$\vec{H} = \vec{u}_x H_x + \vec{u}_y H_y + \vec{u}_z H_z$	Phasor der magnetischen Feldstärke
k_o	Wellenzahl des freien Raumes
k_z	Wellenzahl der leeren Hohlleitung
l	Länge des Ferriteinsatzes
N, M	Zahl der berücksichtigten Eigenwellen im leeren, belasteten Teil der Hohlleitung
$P(t)$	Augenblickswert des Energiestroms
$S(t)$	Augenblickswert des Poyntingvektors
$\vec{u}$	Einheitsvektor

$x, \tilde{x}, \bar{x}, y, z$	kartesische Koordinaten
α	Dämpfungskonstante
β	Phasenkonstante
$\gamma = \alpha + j\beta$	Ausbreitungskonstante
δ	Dicke des Ferriteinsatzes
ε_o	elektrische Feldkonstante
ε_r	Dielektrizitätszahl
μ_o	magnetische Feldkonstante
$\ddot{\mu}_r$	Tensor der relativen Permeabilität
$\mu, \varkappa, \mu_\parallel$	Elemente des Tensors $\ddot{\mu}_r$
$\mu_\pm = \mu'_\pm - j\mu''_\pm$	Eigenwerte des Tensors $\ddot{\mu}_r$
$\mu_\perp = \frac{\mu^2 - \varkappa^2}{\mu}$	
ρ, φ, y	Zylinderkoordinaten
ω	Kreisfrequenz

Spaltenvektoren und Matrizen

$(\bar{A}), (\bar{B})$	Amplituden der vor- und rücklaufenden Wellen in der belasteten Hohlleitung
(I)	Amplituden der einfallenden Wellen
(R)	Amplituden der reflektierten Wellen
(T)	Amplituden der transmittierten Wellen
$(Q), (U), (V), (W), (X), (Z)$	Matrizen der Entwicklungskoeffizienten
(Y)	Matrix der Feldwellenleitwerte

(S^G)	verallgemeinerte Streumatrix der gesamten Anordnung
(S^o), (S^l)	verallgemeinerte Streumatrix der Stoßstelle bei z = 0, z = l
(S^T)	verallgemeinerte Streumatrix der belasteten Hohlleitung
$(\bar{S})$	auf Feldwellenwiderstand normierte verallgemeinerte Streumatrix
(S)	Streumatrix der ausbreitungsfähigen Wellen
S_{11}, S_{22}, S_{12}, S_{21}	Elemente der Streumatrix der H_{10}-Welle (Zweitorstreumatrix)
(T^o), (T^l)	verallgemeinerte Wellenkettenmatrizen der Stoßstelle bei z = 0, z = l
(1)	Einheitsmatrix

Indizes

$(\ )'$	gestrichene komplexe Größen beziehen sich auf das umgepolte Gleichfeld $(-H_o)$
$(\ )^v$, $(\ )^r$	zu vor- bzw. rücklaufenden Eigenwellen gehörende Größe
$(\ )^o$, $(\ )^l$	zu Stoßstelle z = 0 bzw. z = l gehörende Größe

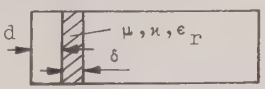
Tabelle 1: Lösung des Gleichungssystems (3.37) nach Gln. (3.51) oder Gln. (3.49)

N = 5

	Gl. 3.51				Gl. 349			
l/mm	$\|S_{11}\|$	arc S_{11}	$\|S_{21}\|$	arc S_{21}	$\|S_{11}\|$	arc S_{11}	$\|S_{21}\|$	arc S_{21}
2,5	0,0280	-113,0°	0,9987	- 20,9°	0,0285	-113,8°	0,9985	- 21,0°
5,0	0,0619	-134,7°	0,9961	- 42,3°	0,0623	-135,3°	0,9961	- 42,3°
7,5	0,0931	-156,8°	0,9926	- 63,8°	0,0933	-157,2°	0,9926	- 63,8°
10,0	0,1148	-178,8°	0,9893	- 85,2°	0,1147	-179,2°	0,9893	- 85,3°
12,5	0,1224	159,2°	0,9873	-106,7°	0,1220	158,9°	0,9874	-106,7°
16,0	0,1139	137,3°	0,9872	-128,1°	0,1133	137,0°	0,9873	-108,1°
17,5	0,0900	115,3°	0,9884	-149,6°	0,0894	115,1°	0,9885	-149,6°
20,0	0,0537	93,4°	0,9896	-171,1°	0,0530	93,1°	0,9897	-171,2°
25,0	0,0344	-131,6°	0,9877	145,6°	0,0350	-132,4°	0,9878	145,6°
30,0	0,1014	-175,0°	0,9811	102,7°	0,1015	-175,4°	0,9813	102,7°
35,0	0,1111	141,8°	0,9784	60,0°	0,1108	141,6°	0,9784	60,0°
40,0	0,0589	99,3°	0,9804	17,1°	0,0533	103,8°	0,9785	17,0°
45,0	0,0262	-131,3°	0,9790	- 26,0°	0,2311	57,3°	0,9810	- 20,8°
50,0	0,0949	-171,3°	0,9733	- 69,0°	1,546	111,8°	1,424	-167,8°

N = 15

	Gl. 3.51				G.. 3.49			
l/mm	$\|S_{11}\|$	arc S_{11}	$\|S_{21}\|$	arc S_{21}	$\|S_{11}\|$	arc S_{11}	$\|S_{21}\|$	arc S_{21}
2,5	0,0239	-112,5°	0,9991	- 20,8°	0,0238	-112,5°	0,9991	- 20,8°
5,0	0,0559	-134,4°	0,9968	- 42,1°	0,0559	-134,4°	0,9968	- 42,1°
7,5	0,0867	-156,4°	0,9934	- 63,6°	0,0867	-156,4°	0,9934	- 63,6°
10,0	0,1089	-178,5°	0,9900	- 85,0°	0,1088	-178,5°	0,9900	- 85,0°
12,5	0,1178	159,5°	0,9878	-106,5°	0,1168	158,5°	0,9877	-106,5°
15,0	0,1115	137,5°	0,9875	-127,9°	3,080	- 31,3°	0,9238	-126,7°
17,5	0,0901	115,5°	0,9885	-149,4°	80,18	-105,8°	0,1331	132,5°
20,0	0,0563	93,5°	0,9898	-170,9°	219,9	-176,7°	0,0000	./.
25,0	0,0284	-131,2°	0,9884	145,9°				
30,0	0,0953	-174,8°	0,9819	102,9°				
35,0	0,1082	142,0°	0,9787	60,2°				
40,0	0,0609	99,3°	0,9807	17,4°				
45,0	0,0205	-131,9°	0,9798	- 25,8°				
50,0	0,0897	-171,1°	0,9736	- 68,8°				



d = 0,2 mm, δ = 1,05 mm

f = 9,23 GHz, a = 22,86 mm

$\mu = 4{,}35 - j0{,}59$

$\kappa = 2{,}95 - j0{,}59$

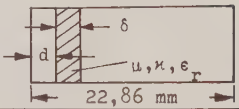
$\varepsilon_r = 12{,}5 - j0{,}005$

Tabelle 2: Zur Konvergenz der Entwicklungen

$d = 2$ mm $\quad \mu = 5{,}6-j5{,}1 \quad$ $f = 9{,}23$ GHz

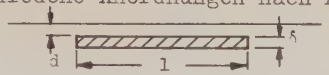
$\delta = 2$ mm $\quad \varkappa = 4{,}2-j5{,}1$

$l = 60$ mm $\quad \varepsilon_r = 12{,}5-j0{,}005$



		N = M = 2	4	8
	Gln.			
S_{21}	(3.42)	0,29547+j0,58656	0,34499+j0,54972	0,34609+j0,54510
	(3.51)	0,28923+j0,48485	0,34599+j0,54929	0,34609+j0,54554
	(3.63)	0,34228+j0,61740	0,33729+j0,55716	0,34803+j0,54271
S_{12}	(3.42)	0,17112+j0,62385	0,20881+j0,62427	0,20473+j0,61500
	(3.51)	0,22055+j0,46453	0,20792+j0,62426	0,20506+j0,61840
	(3.63)	0,18780+j0,60612	0,21110+j0,62451	0,20512+j0,61857
		N = M = 16	20	30
	Gln.			
S_{21}	(3.42)	0,35273+j0,54739	0,35422+j0,54711	0,35422+j0,54711
	(3.51)	0,35357+j0,54700	0,35424+j0,54712	0,35421+j0,54712
	(3.63)	0,35373+j0,54703	0,35426+j0,54709	0,35425+j0,54707
S_{12}	(3.42)	0,20929+j0,62167	0,21055+j0,62067	0,21054+j0,62075
	(3.51)	0,20998+j0,62079	0,21056+j0,62065	0,21054+j0,62075
	(3.63)	0,21010+j0,62040	0,21062+j0,62064	0,21057+j0,62071

Tabelle 3: Zur Konvergenz der Übertragungsfaktoren für verschiedene Anordnungen nach Abb. 1



mm a = 22,86 f = 9,3 GHz		N	S_{21}	S_{12}
d = 5 δ = 1 l = 60	μ = 0,4 κ = -1,0 ε_r = 12,5	8 20 30	0,5529-j0,7608 0,5542-j0,7640 0,5541-j0,7650	0,4265+j0,8382 0,4163+j0,8473 0,4155+j0,8483
d = 5 δ = 1 l = 60	μ = 0,4 -j0,06 κ = -1,0 -j0,06 ε_r = 12,5 -j0,005	8 20 30	0,3365-j0,5528 0,3392-j0,5537 0,3392-j0,5541	0,2405+j0,3394 0,2342+j0,3407 0,2336+j0,3409
d = 1 δ = 1 l = 80	μ = 0,75-j7,0 κ = -0,7 -j7,0 ε_r = 12,5 -j0,005	8 20 30	0,7054-j0,4442 0,7063-j0,4432 0,7063-j0,4430	-0,3669-j0,2994 -0,3663-j0,3004 -0,3663-j0,3002
d = 2 δ = 2 l = 60	μ = 0,9 κ = -0,7 ε_r = 12,5 -j0,005	8 20 30	-0,1397-j0,9234 -0,1390-j0,9227 -0,1398-j0,9225	-0,9405-j0,0136 -0,9397-j0,0126 -0,9396-j0,0126
d = 5 δ = 3 l = 60	μ = 0,4 -j0,06 κ = -1,0 -j0,06 ε_r = 12,5 -j0,005	8 20 30	-0,2475+j0,0119 -0,2395+j0,0138 -0,2395+j0,0135	0,0099-j0,1166 0,0013-j0,1265 0,0014-j0,1265
d = 7 δ = 2 l = 2	μ = -0,7 -j5,0 κ = -2,0 -j5,0 ε_r = 12,5 -j0,005	8 20 30	0,3412-j0,6134 0,3745-j0,6261 0,3747-j0,6263	0,3378-j0,6162 0,3758-j0,6280 0,3761-j0,6282
d = 1 δ = 2 l = 10	μ = -0,7 -j5,0 κ = -2,0 -j5,0 ε_r = 12,5 -j0,005	8 20 30	0,1906-j0,1351 0,1689-j0,1517 0,1701-j0,1513	0,5358-j0,4443 0,5284-j0,4447 0,5287-j0,4448

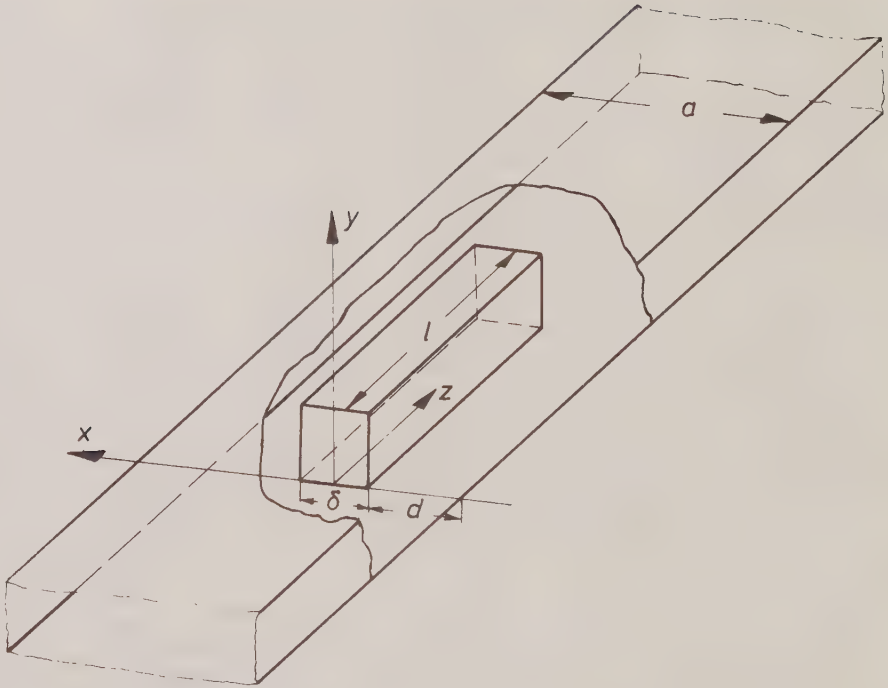


Abb. 1 : Ferritplatte in Rechteckhohlleitung

Zur Wahl des Koordinatensystems siehe Abschnitt 3.5.2

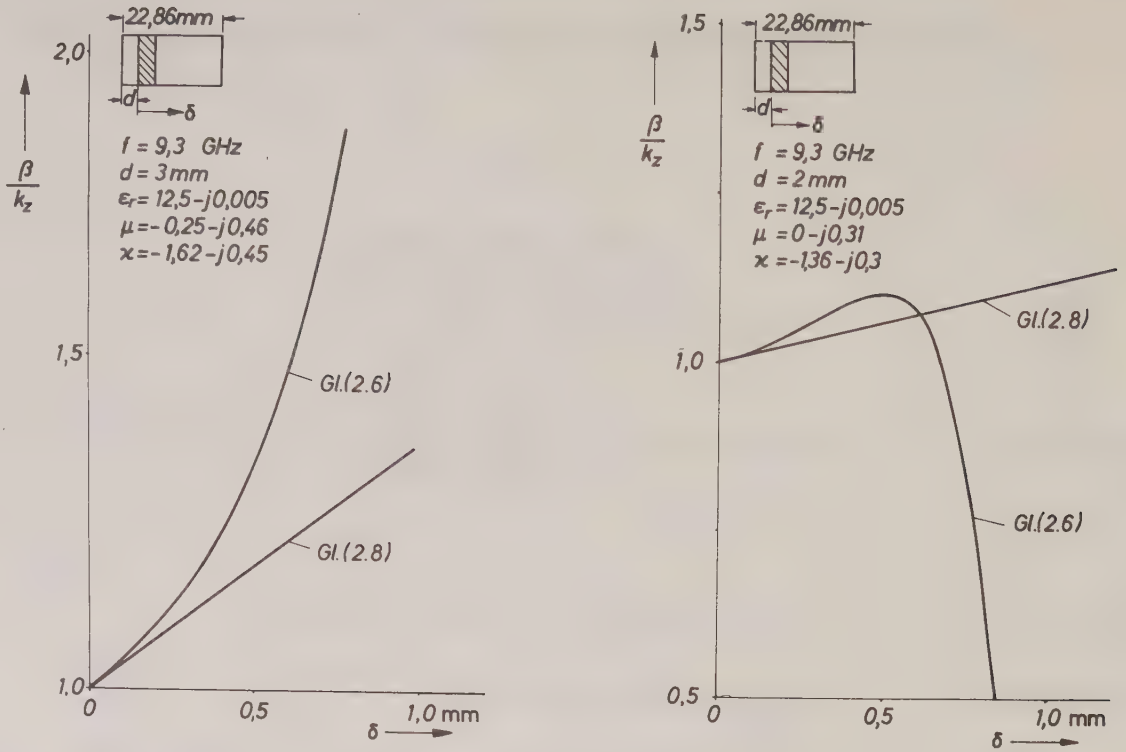


Abb.2 : Ausbreitungskonstanten einer Hohlleitung mit Ferriteinsatz, exakt (Gl. 2.6) und in erster Näherung (Gl. 2.8)

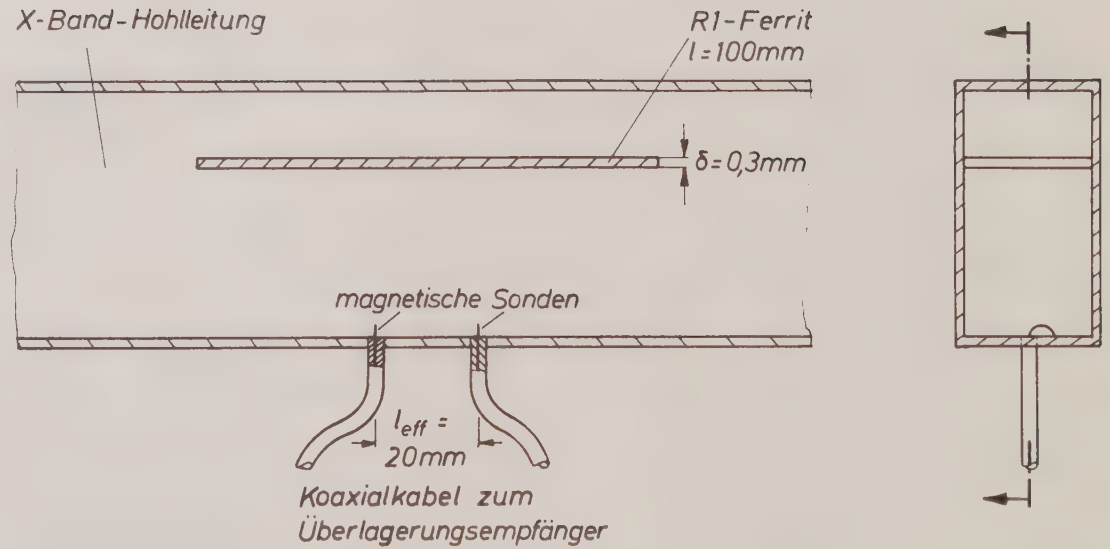


Abb. 3 : Anordnung zur Messung der Ausbreitungskonstanten

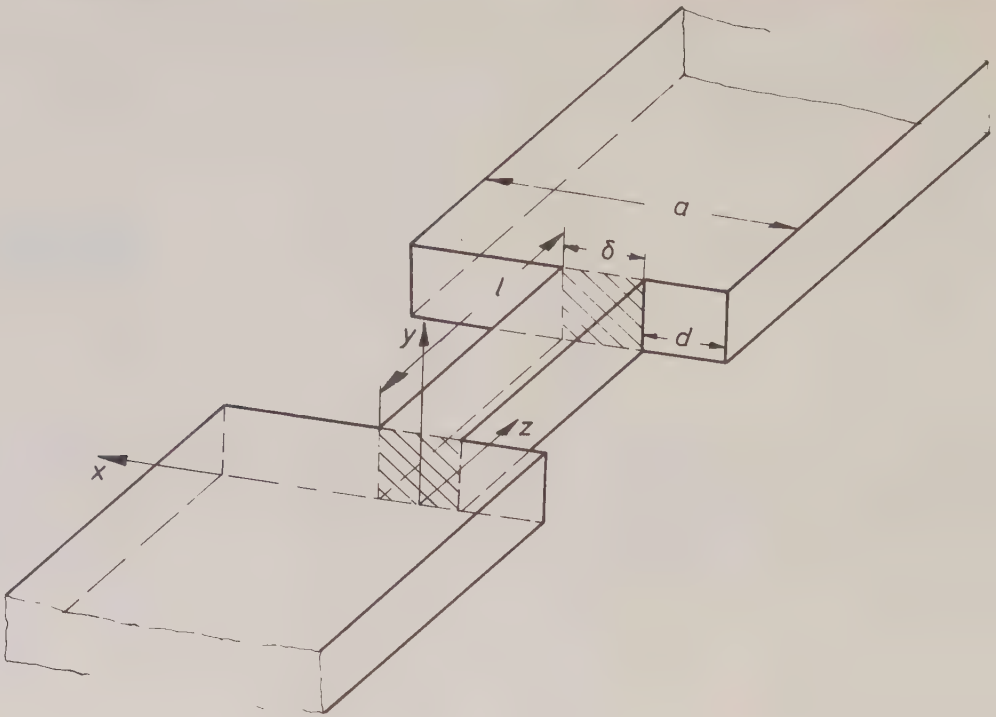


Abb. 4 : Sprunghafter Übergang auf ferritgefüllte Hohlleitung kleinerer Breite

Zur Wahl des Koordinatensystems siehe Abschnitt 3.5.2

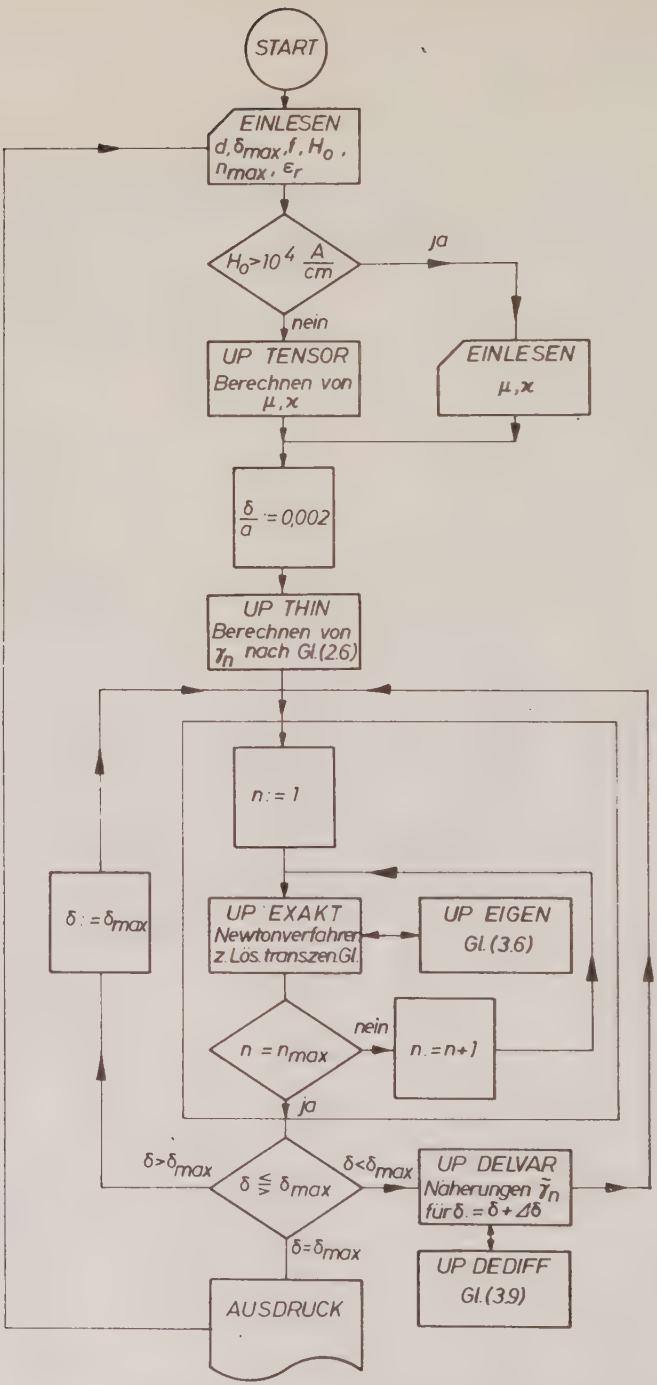


Abb. 5 : Flußdiagramm zur Berechnung der Ausbreitungskonstanten γ_n

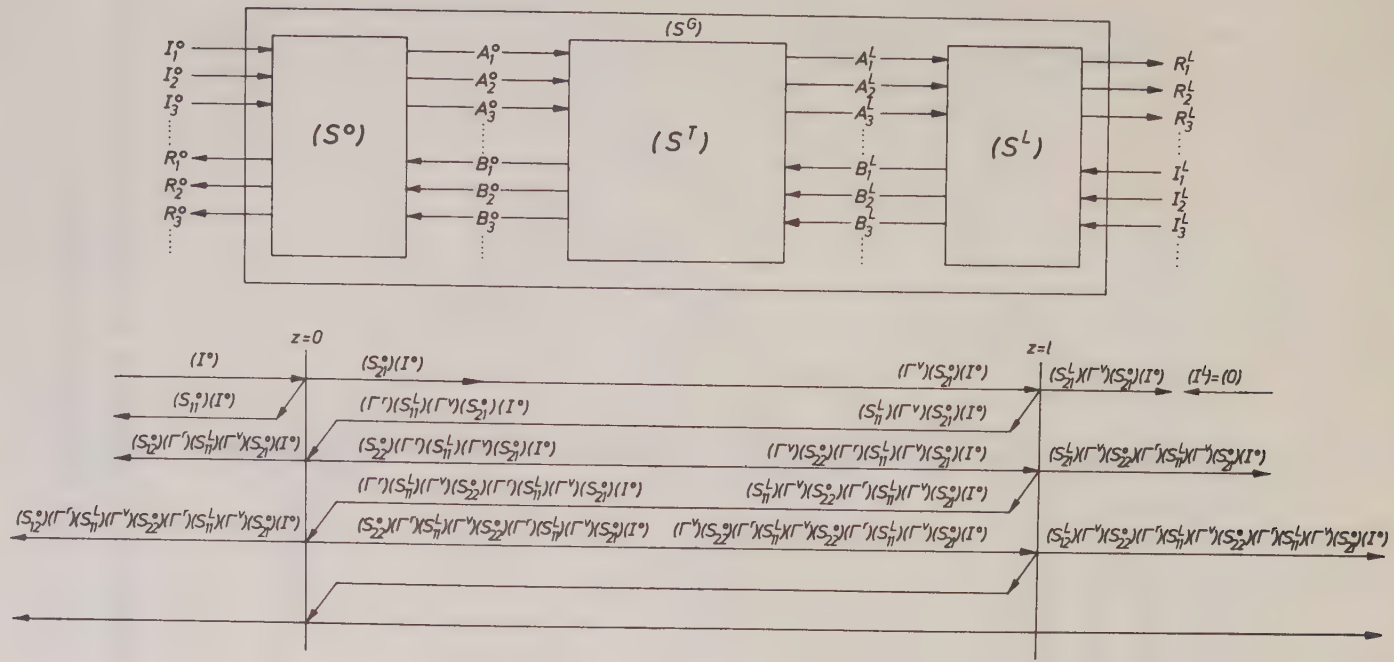


Abb. 6: Zur Beschreibung durch die verallgemeinerte Streumatrix

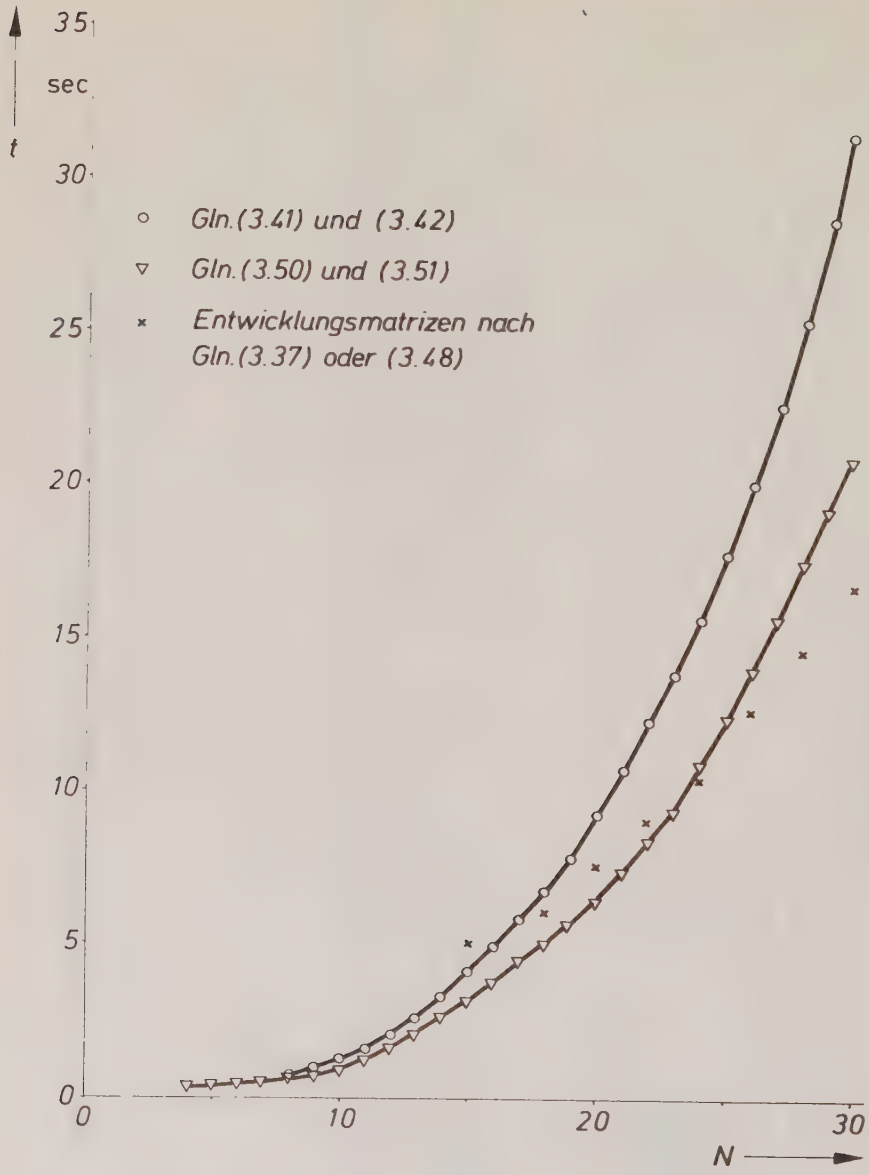


Abb. 7 Rechenzeiten zur Auflösung von Gln.(3.41) und (3.42) sowie von Gln.(3.50) und (3.51)

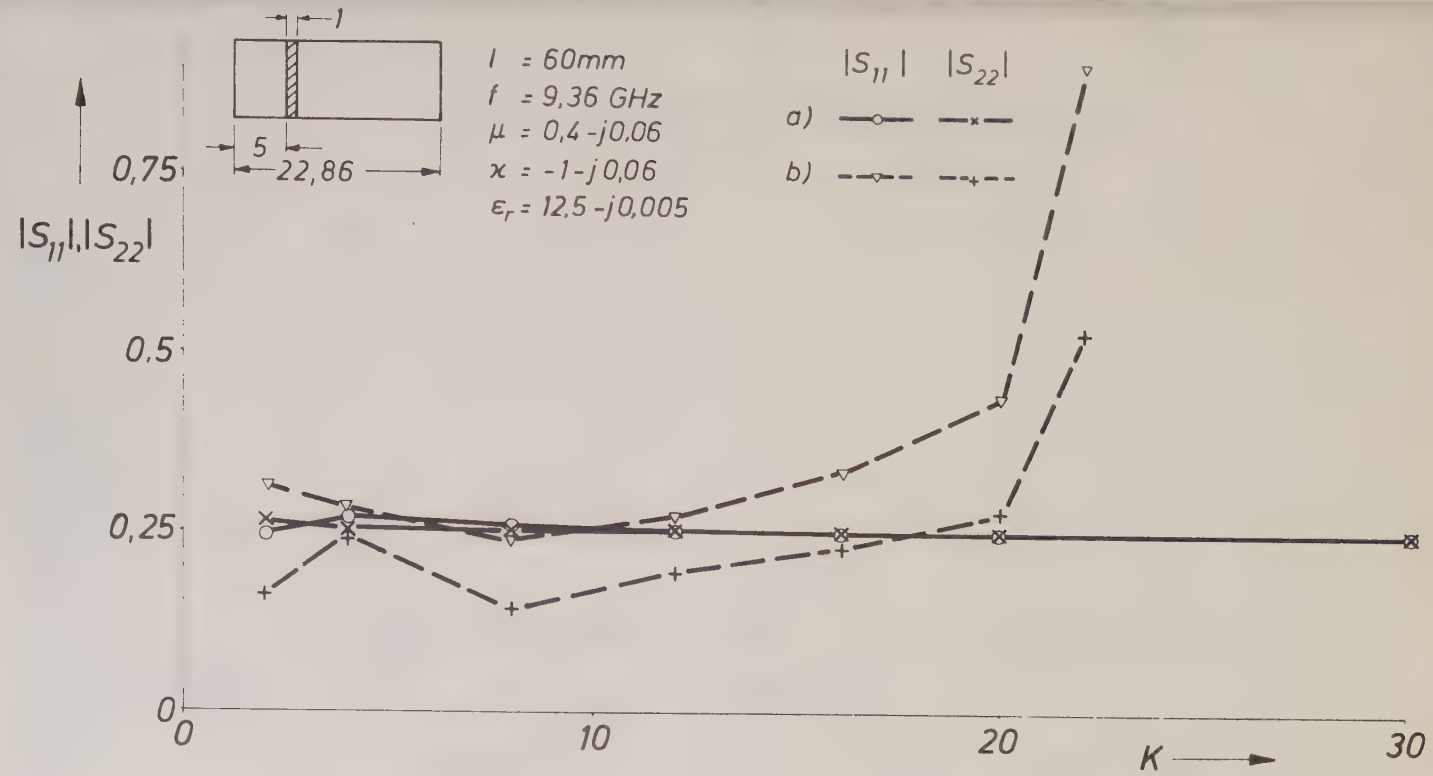


Abb. 8 : $|S_{11}|$ und $|S_{22}|$ berechnet nach Gln.(3.50) unter Mitnahme von K Eigenwellen
a) Eigenwellen in leerer und belasteter Hohlleitung lückenlos
b) Fehlende Eigenwelle m=2 in der belasteten Hohlleitung

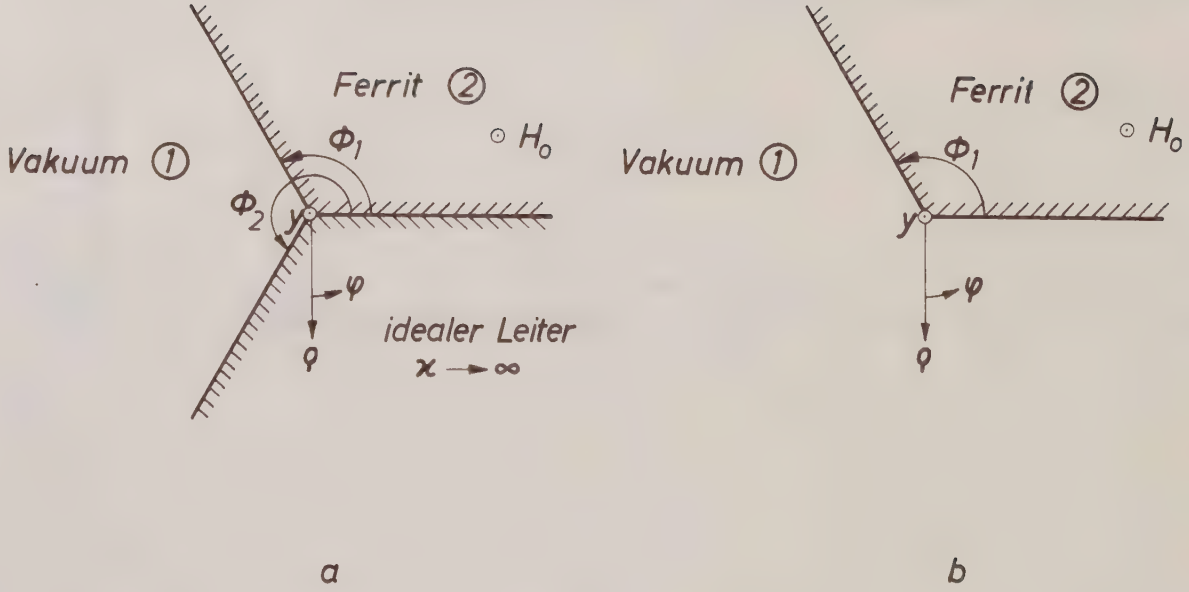


Abb. 9: Kantenkonfigurationen mit Ferrit

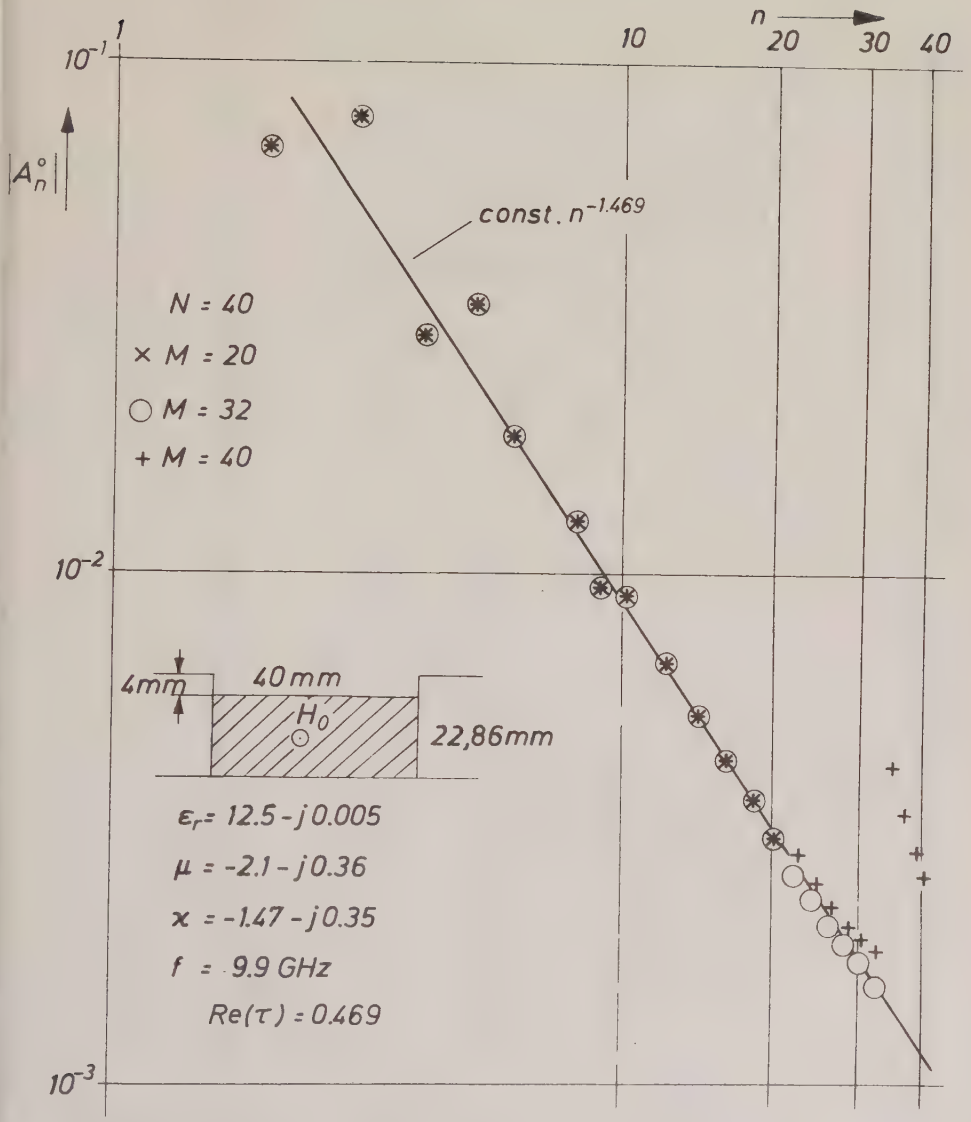


Abb. 10 : Abfall der Amplituden A_n^o

M = Zahl der Eigenwellen im belasteten Teil
N = Zahl der Eigenwellen im unbelasteten Teil

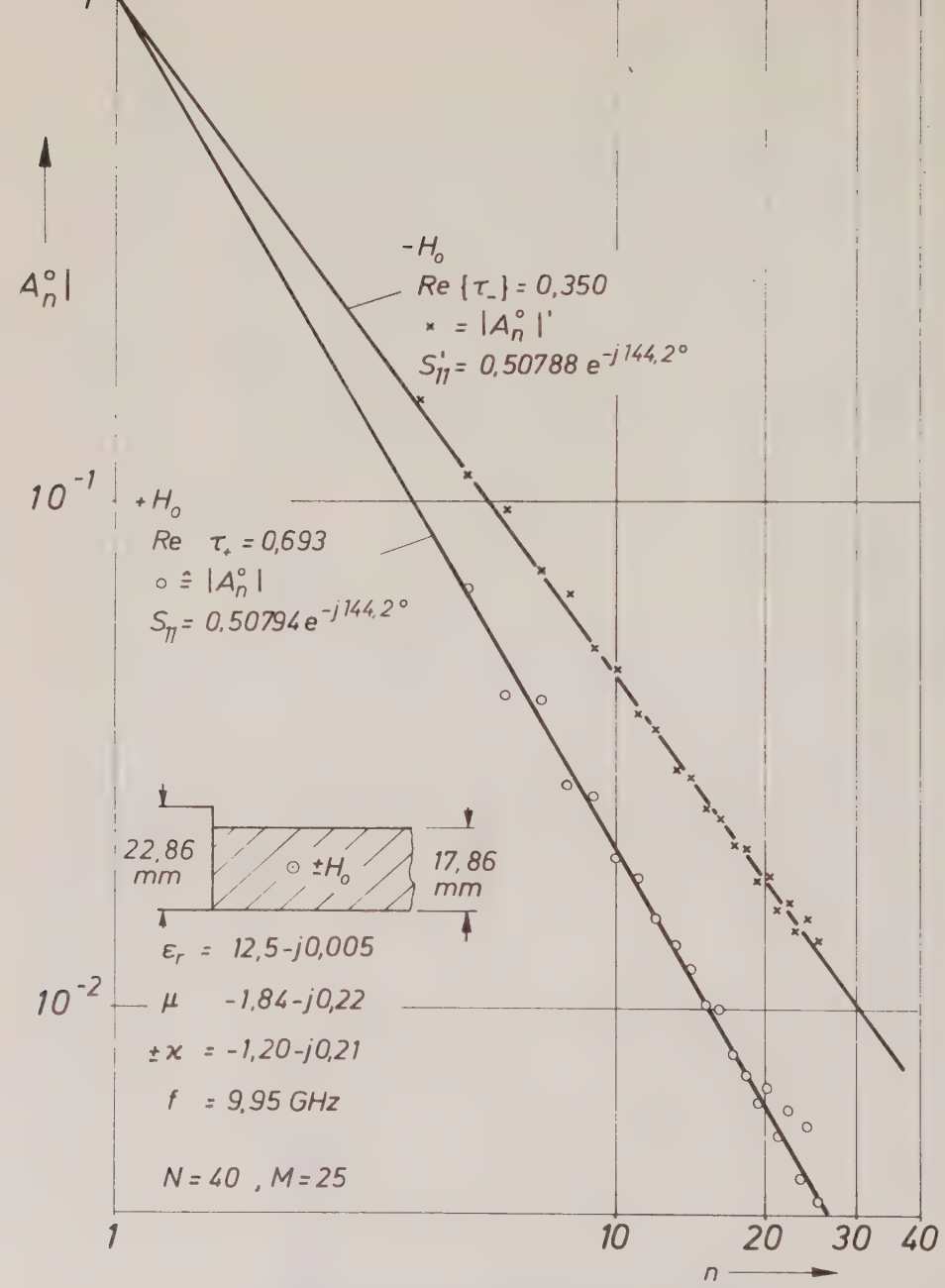


Abb. 11 : Abfall der Amplituden A_n° für beide Magnetisierungsrichtungen

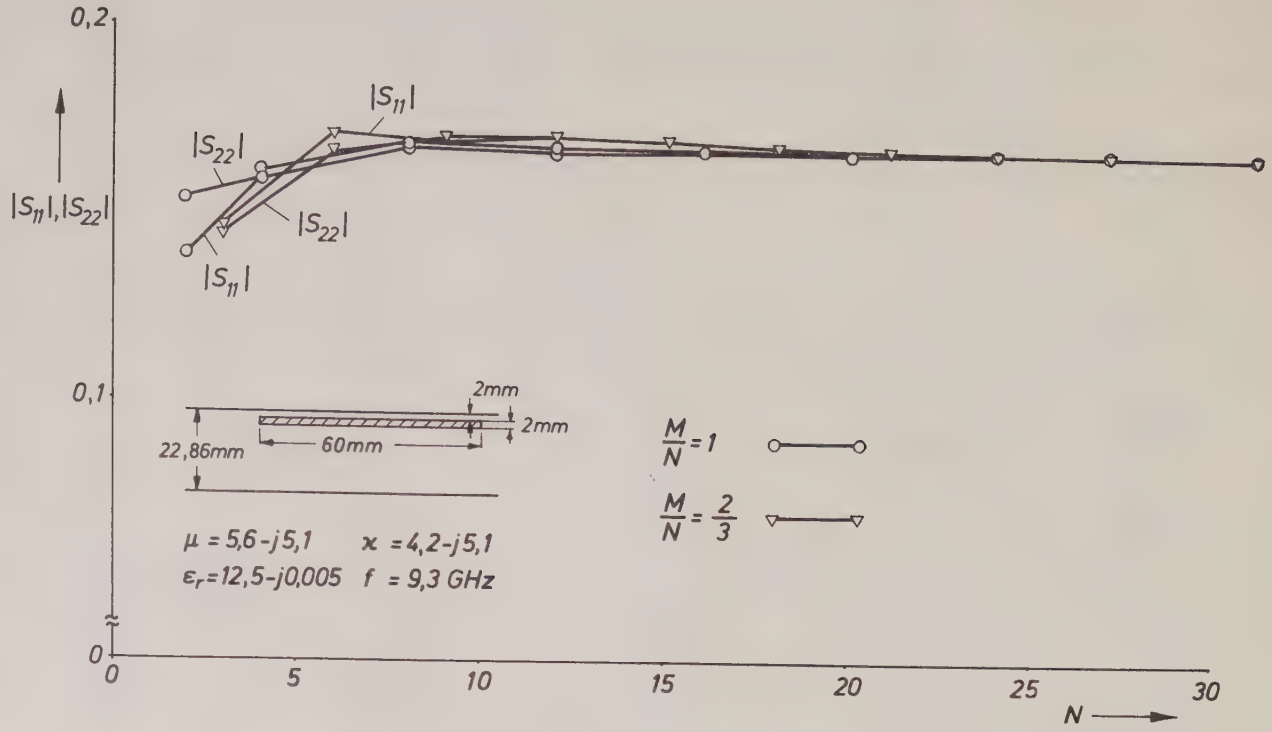


Abb. 12 : Konvergenz der Reflexionsfaktoren für verschiedene Verhältnisse M/N (Gl. 3.60)

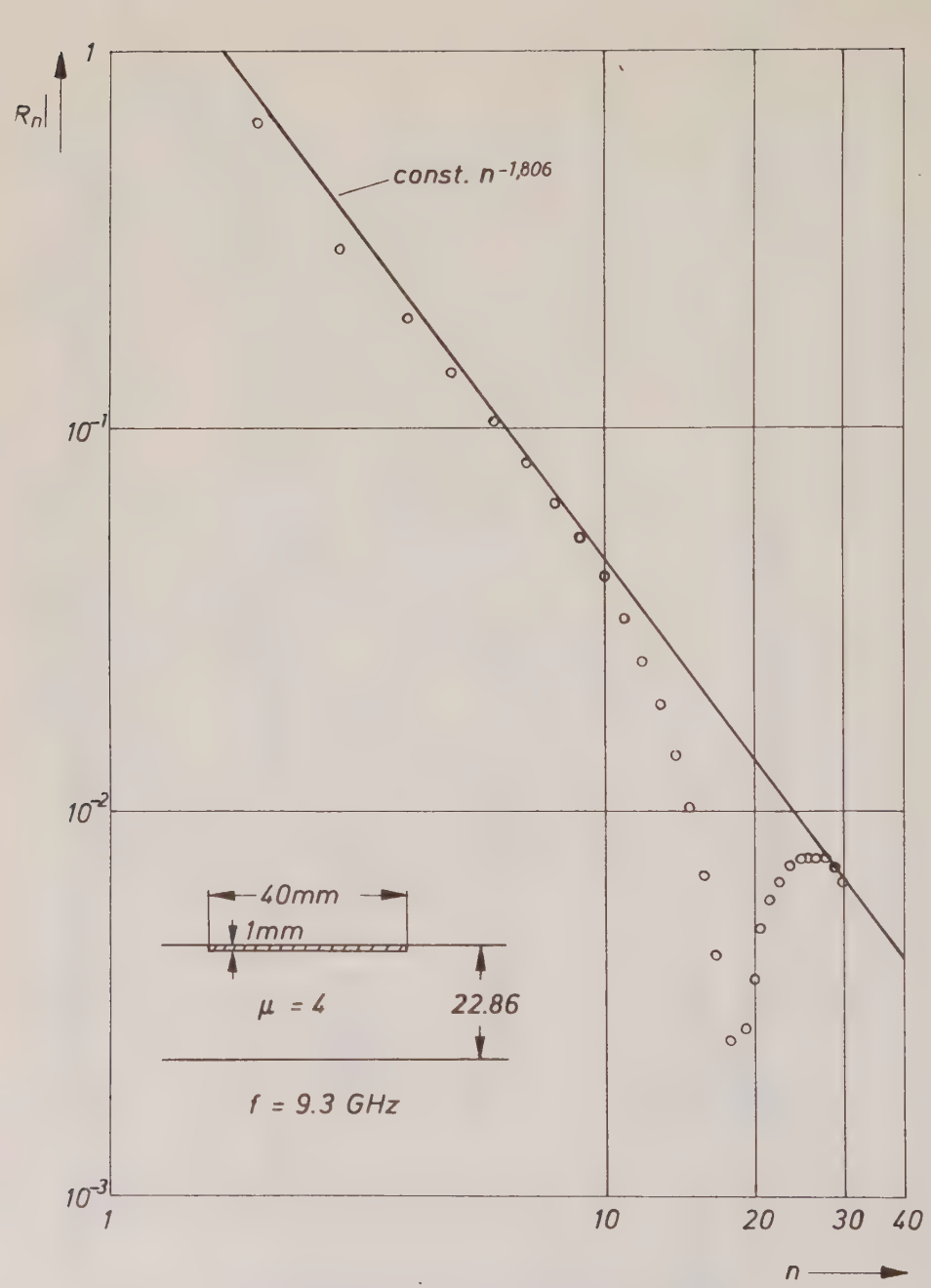


Abb. 13 : Abfall der Amplituden R_n

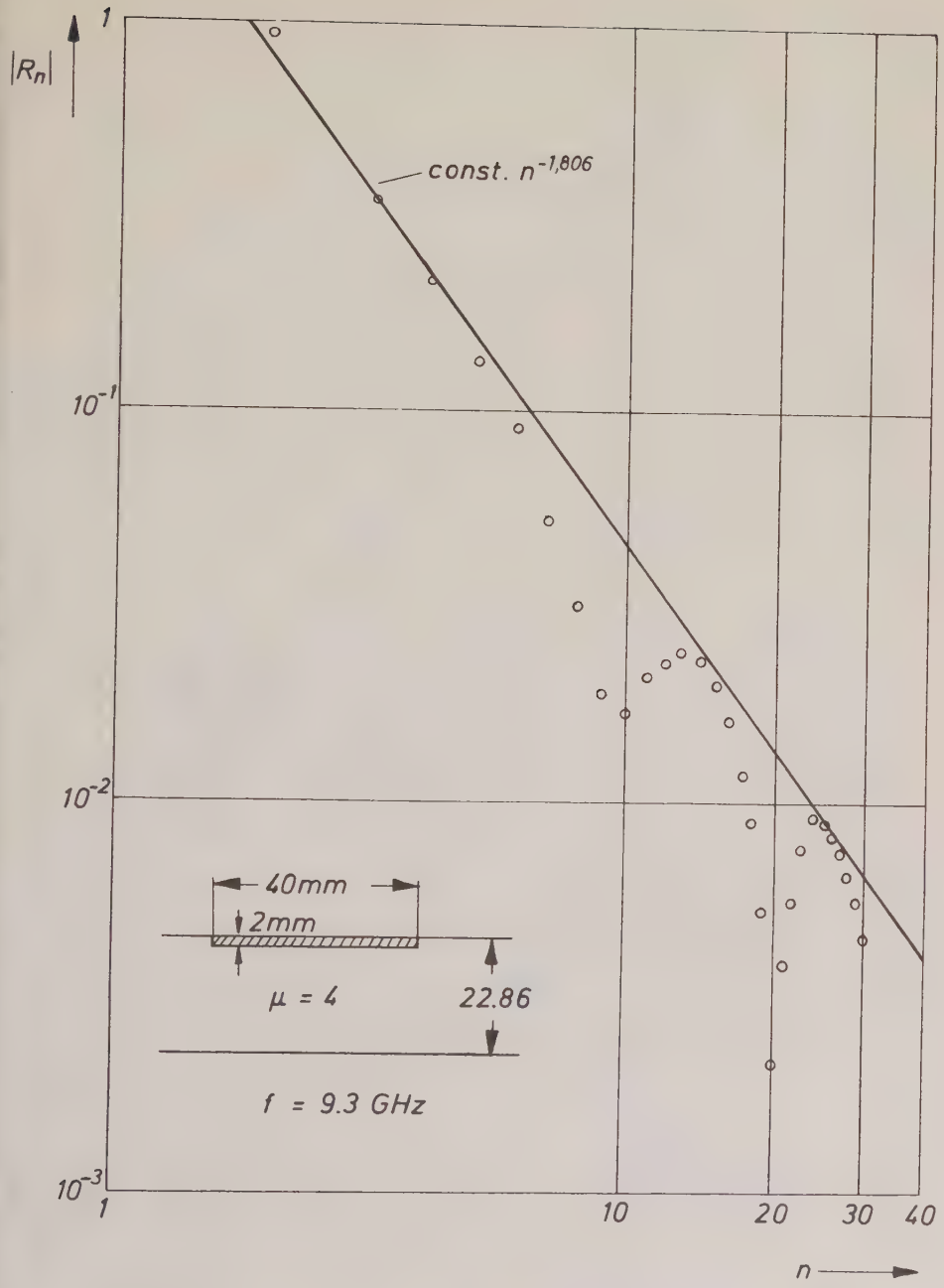


Abb. 14 : Abfall der Amplituden R_n

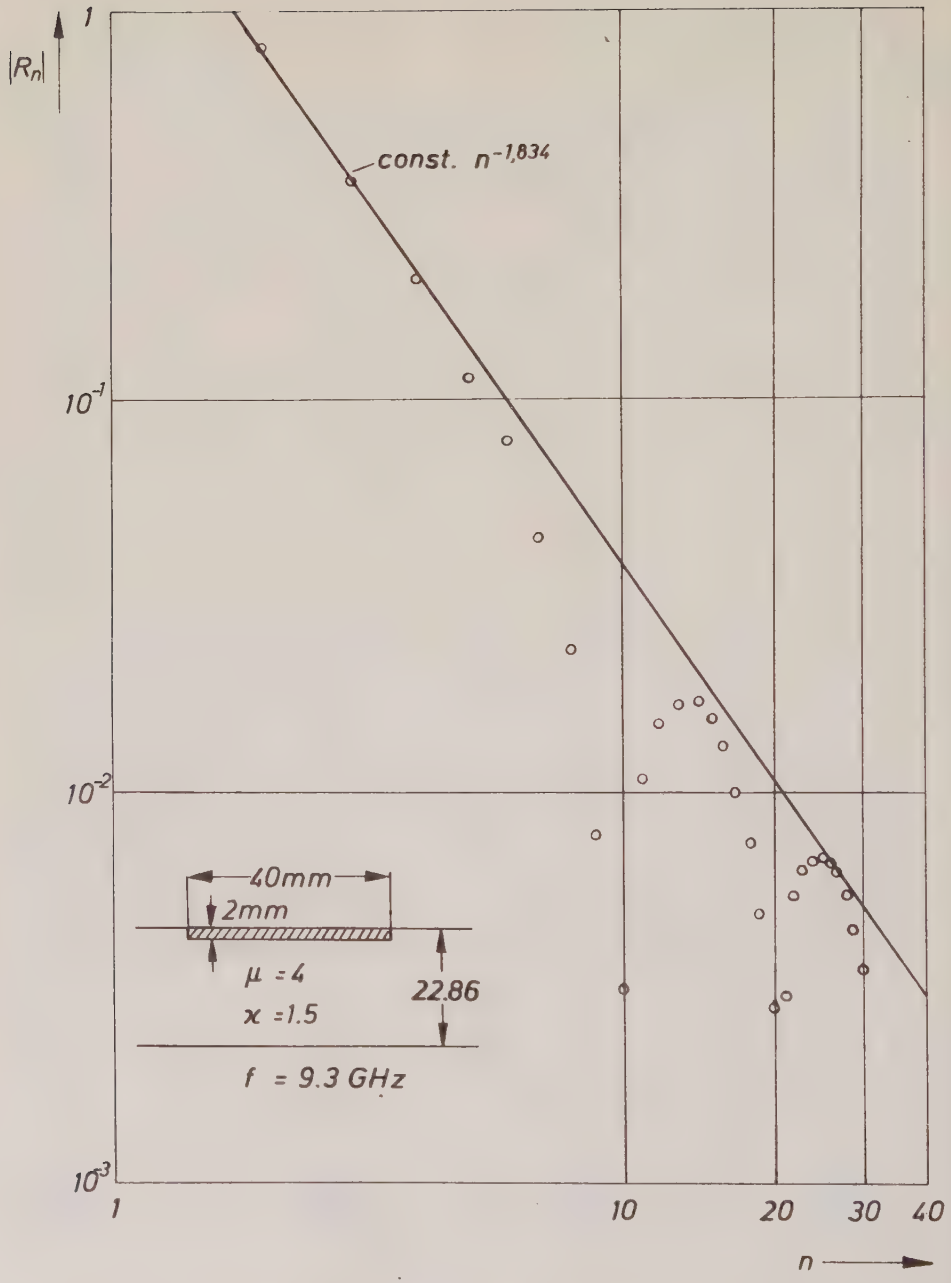


Abb.15 : Abfall der Amplituden R_n

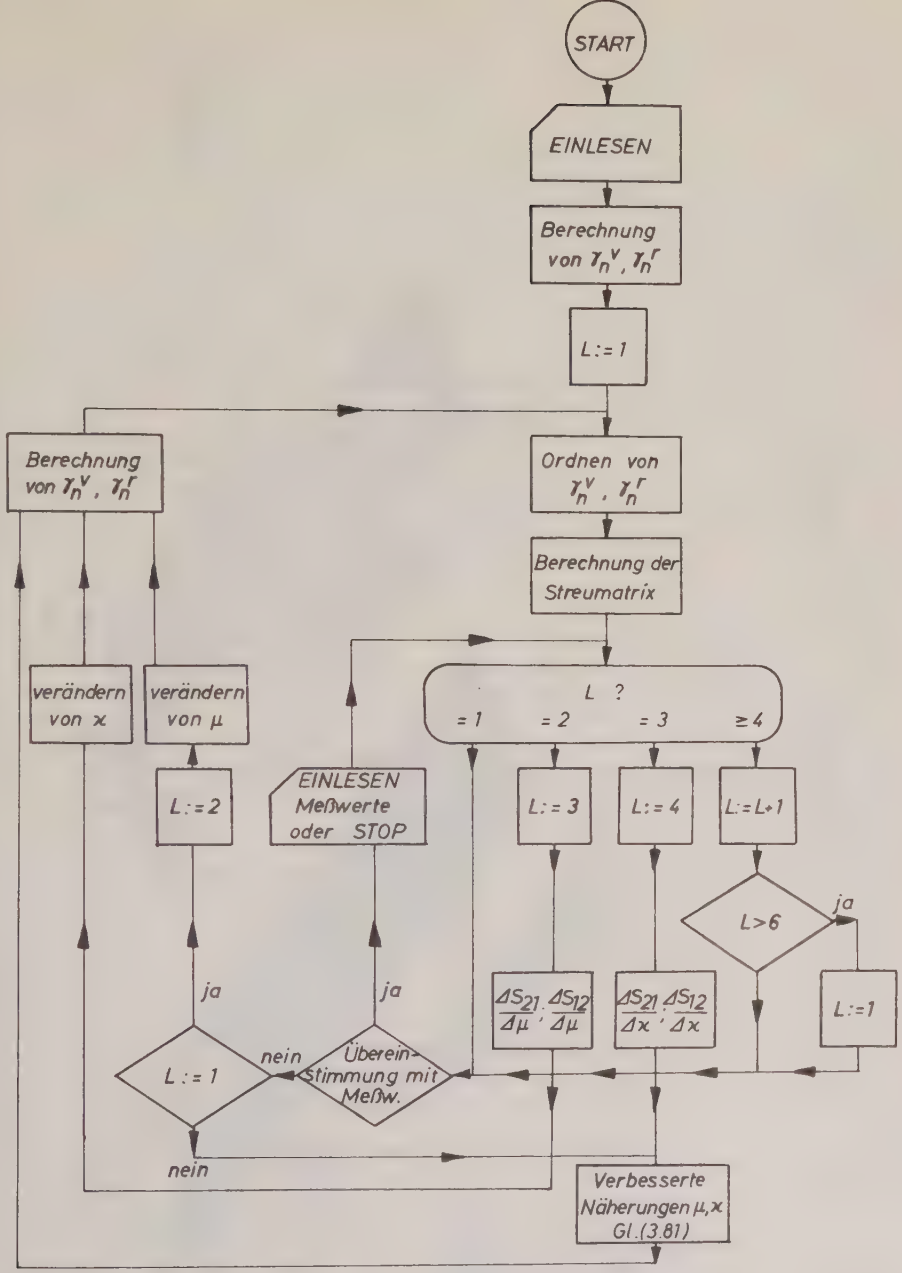


Abb.16: Flußdiagramm zur Bestimmung von μ und x aus der Streumatrix

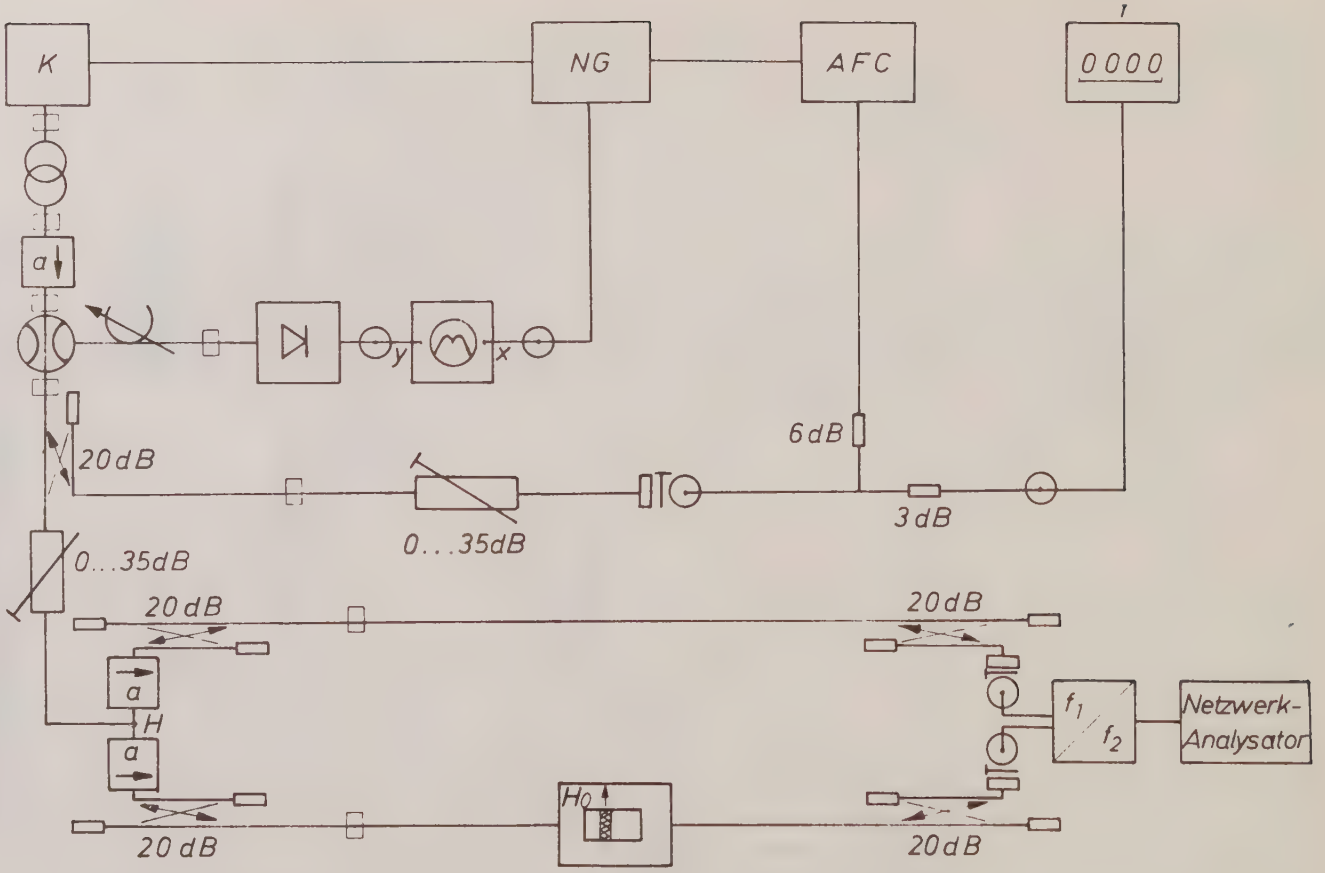


Abb.17: Schaltbild der Mikrowellenmeßapparatur

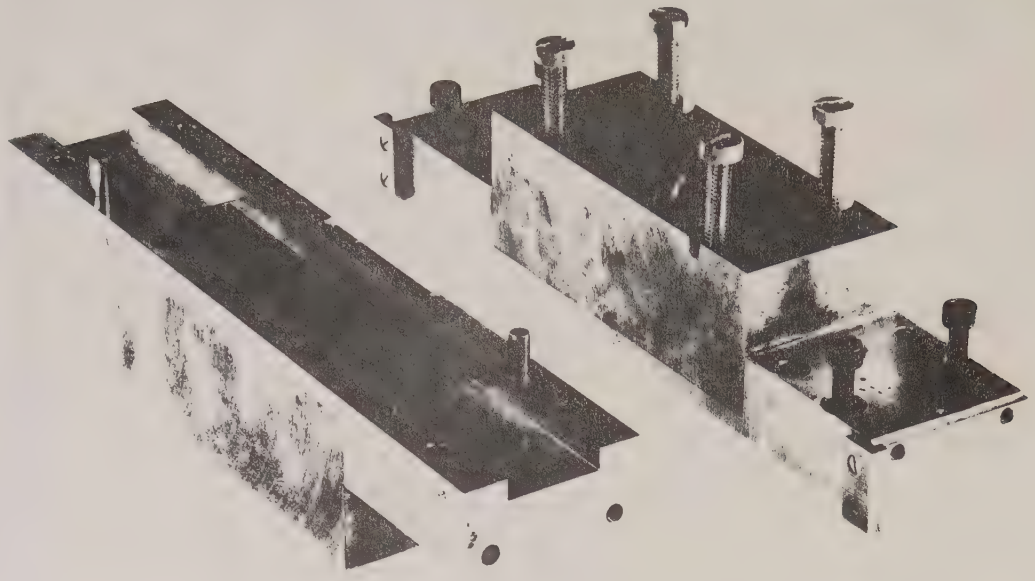


Abb. 18 : Meßhohlleitung mit Polschuhen

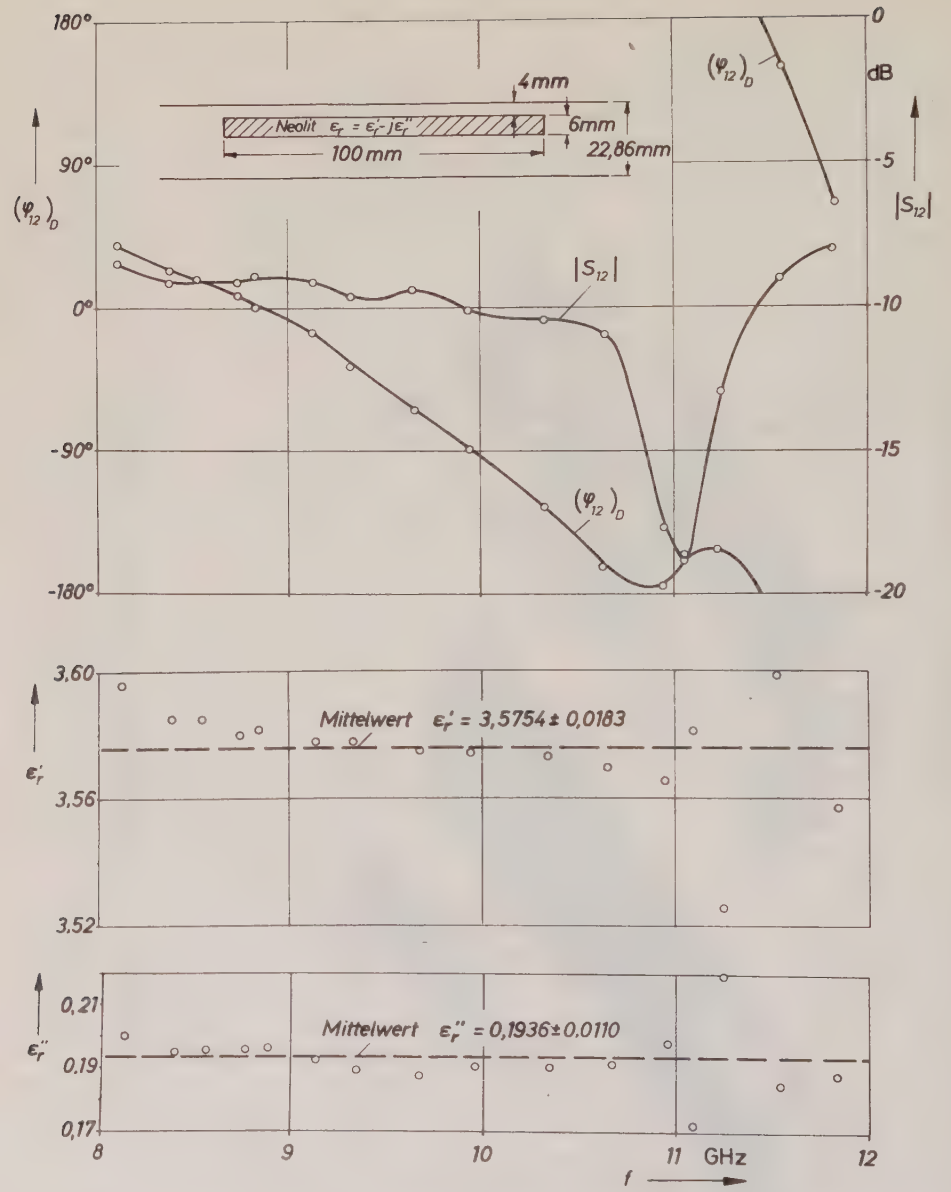


Abb. 19 : Messung des Übertragungsfaktors einer dielektrisch belasteten Hohlleitung in Abhängigkeit von der Frequenz und die daraus bestimmte Dielektrizitätszahl

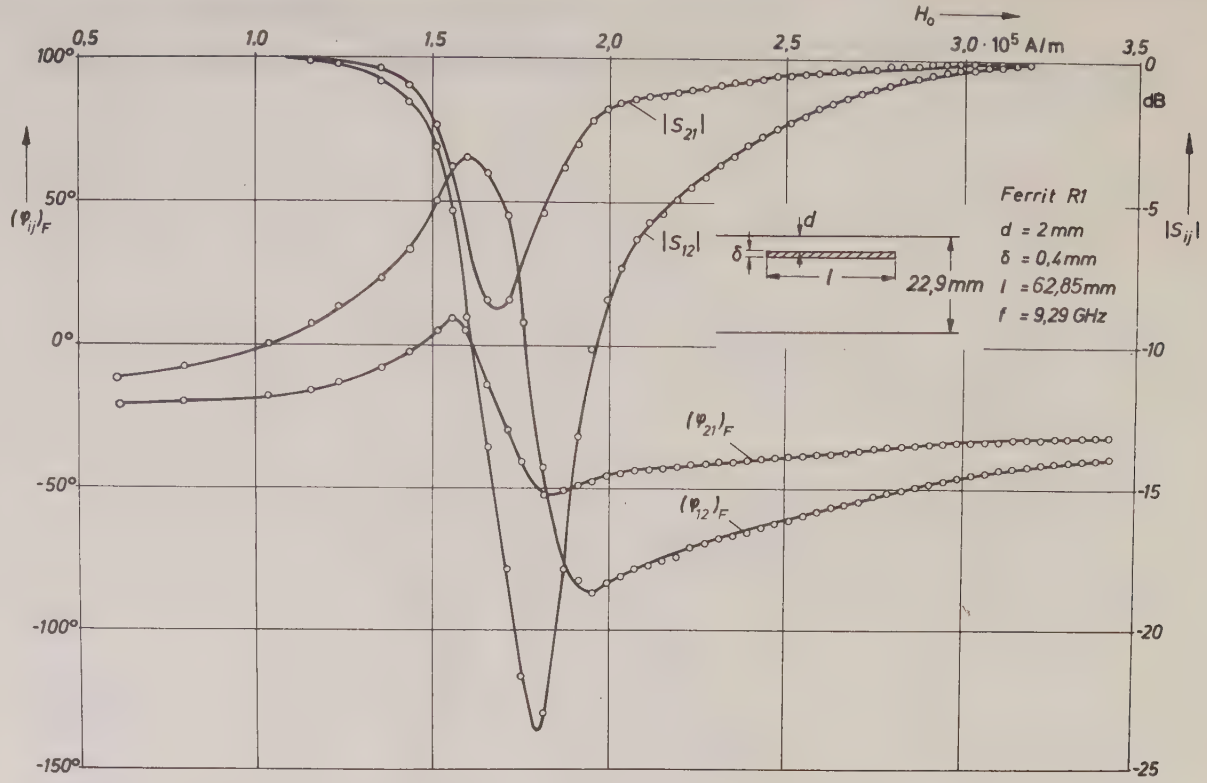


Abb. 20: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

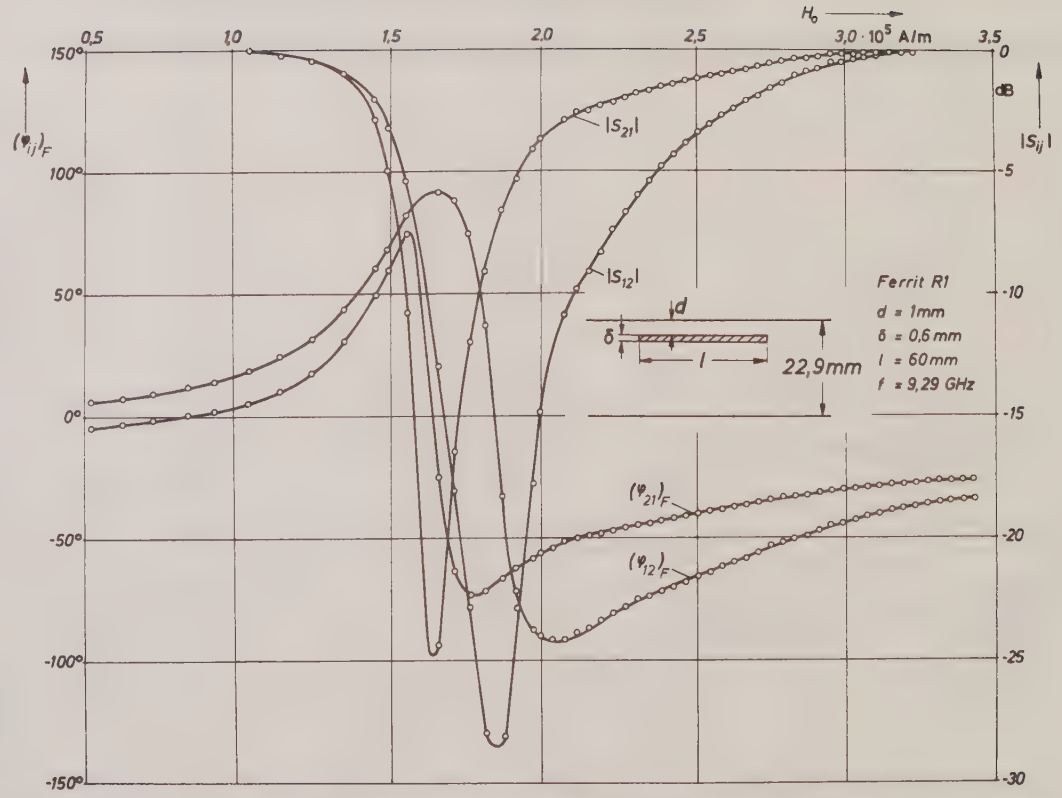


Abb. 21: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

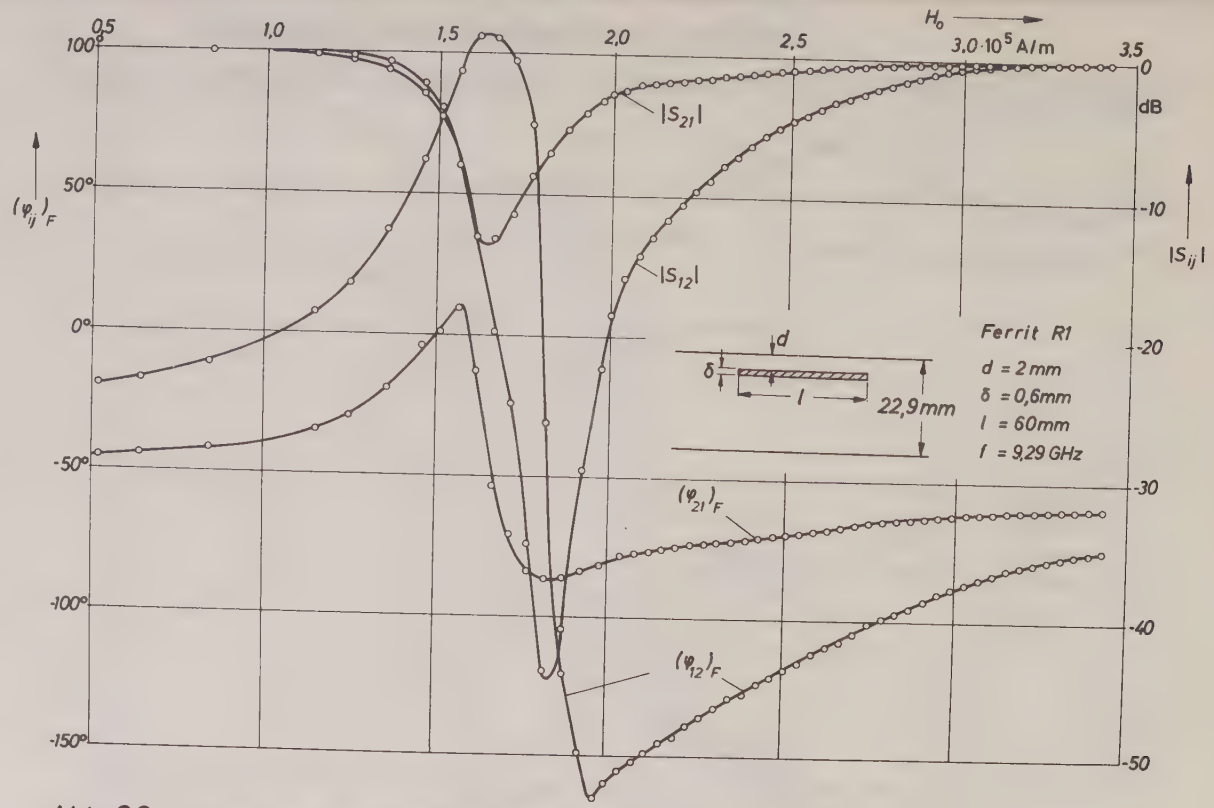


Abb. 22: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

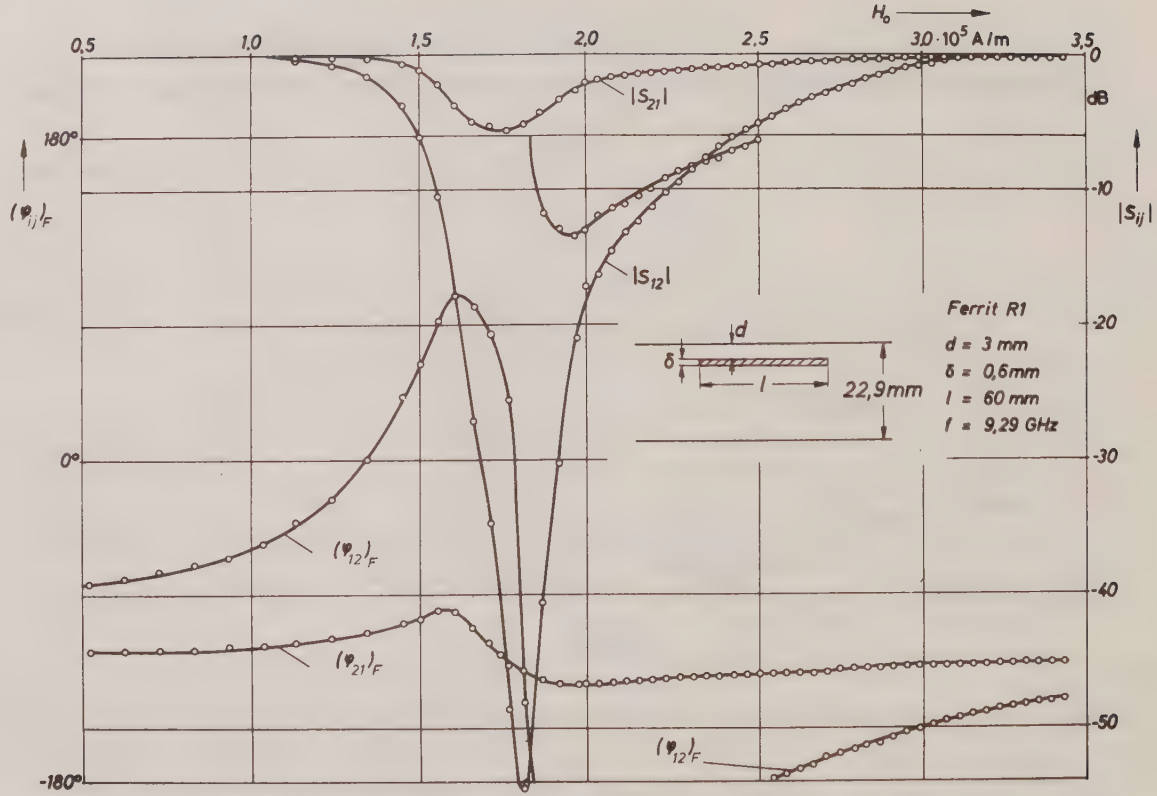


Abb. 23: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

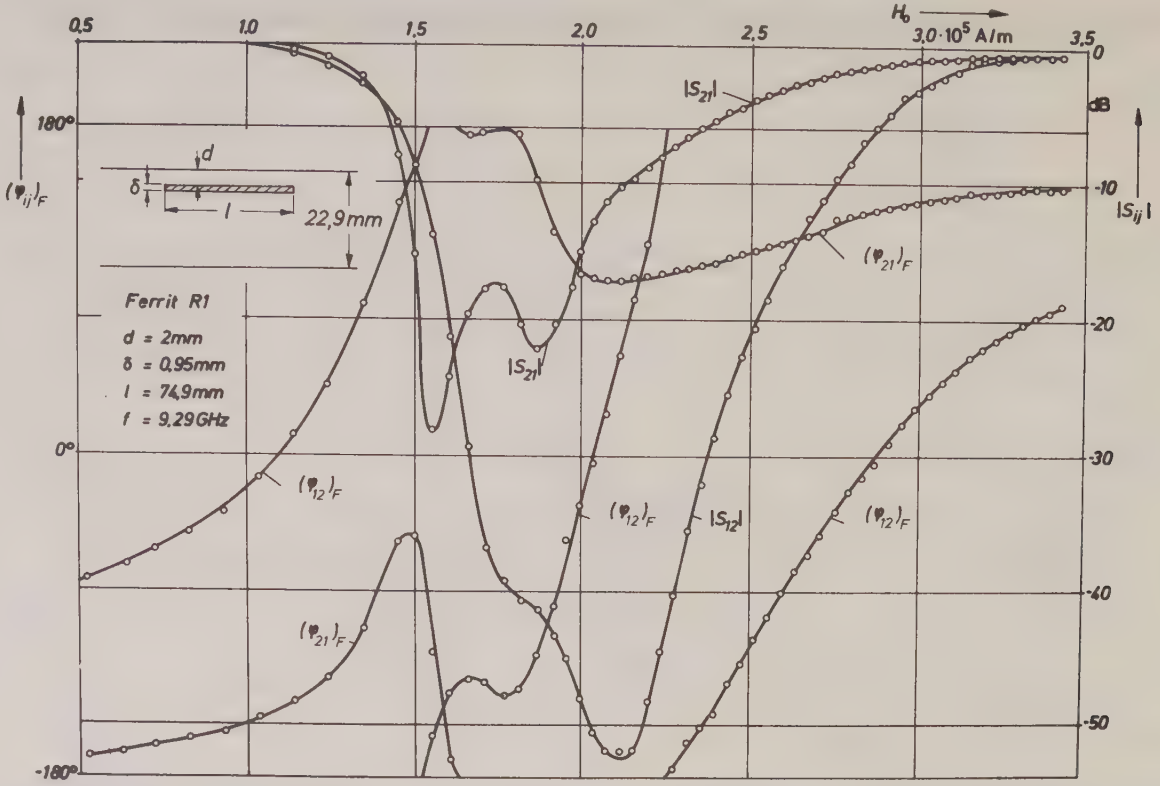


Abb. 24: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

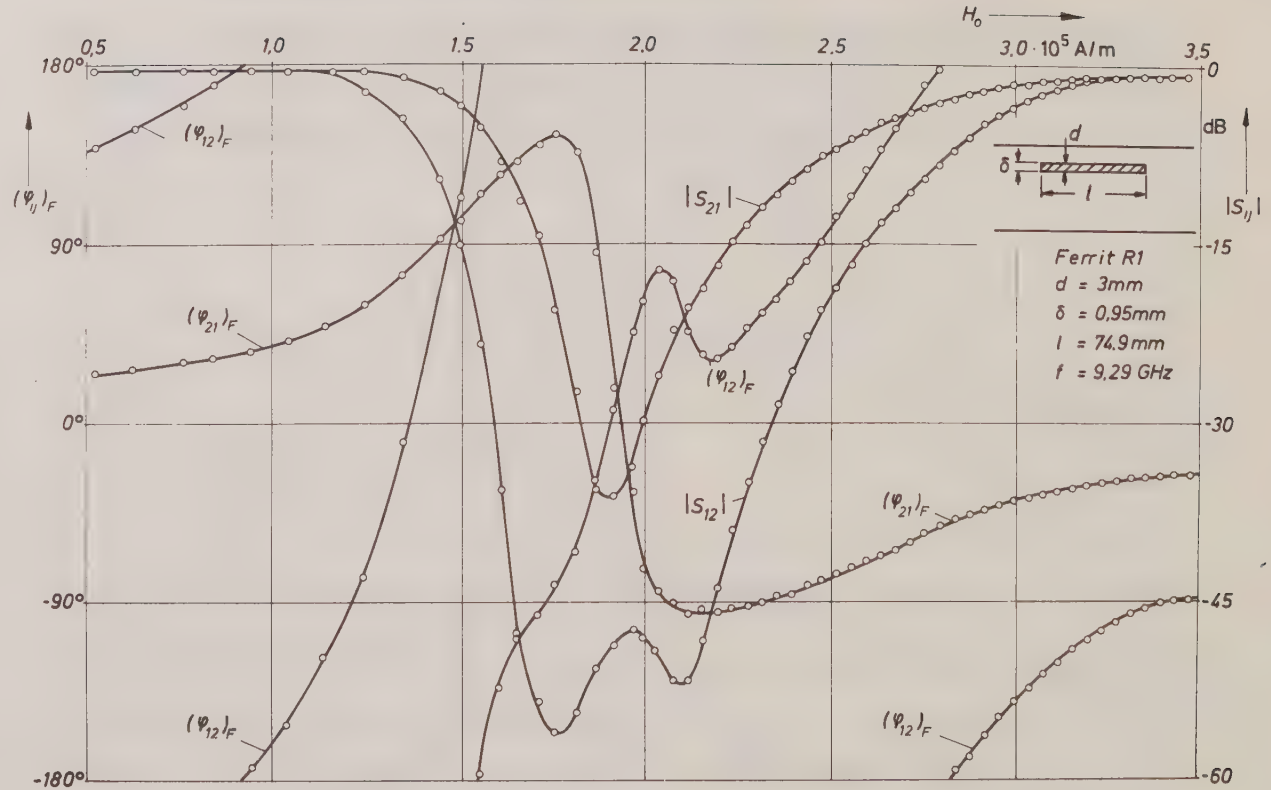


Abb. 25: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

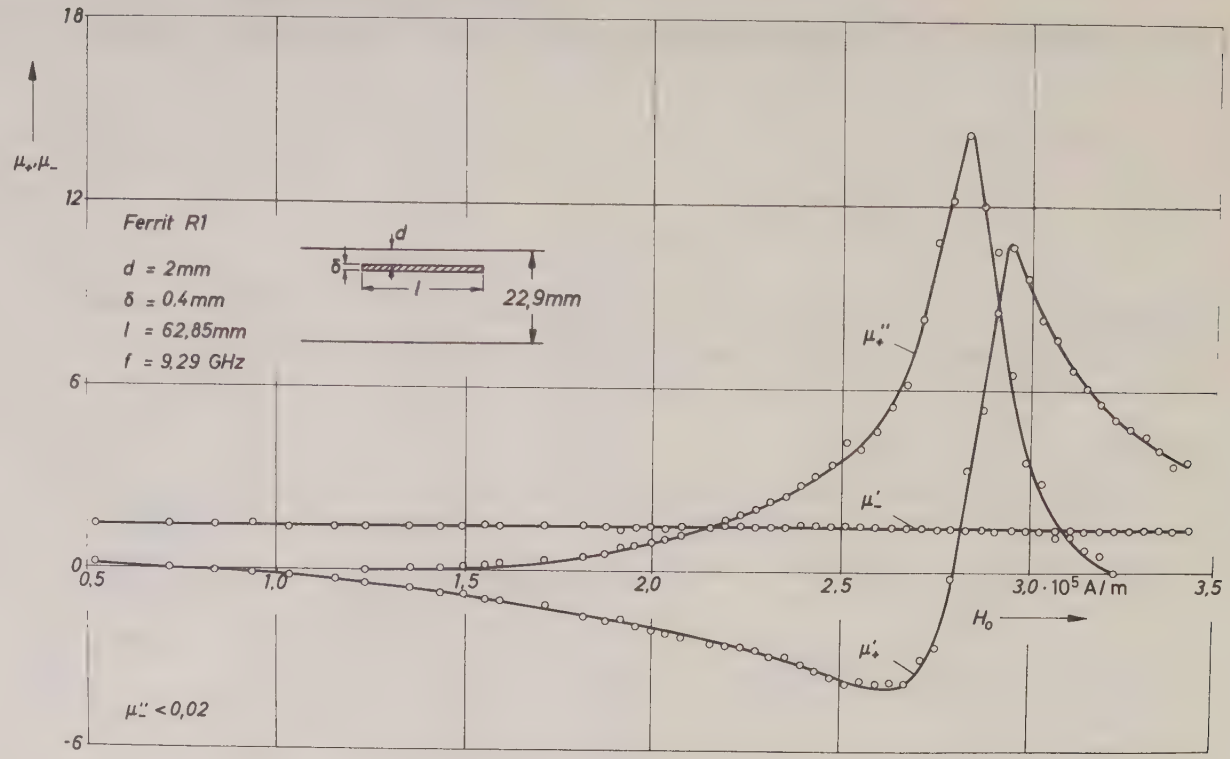


Abb. 26: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

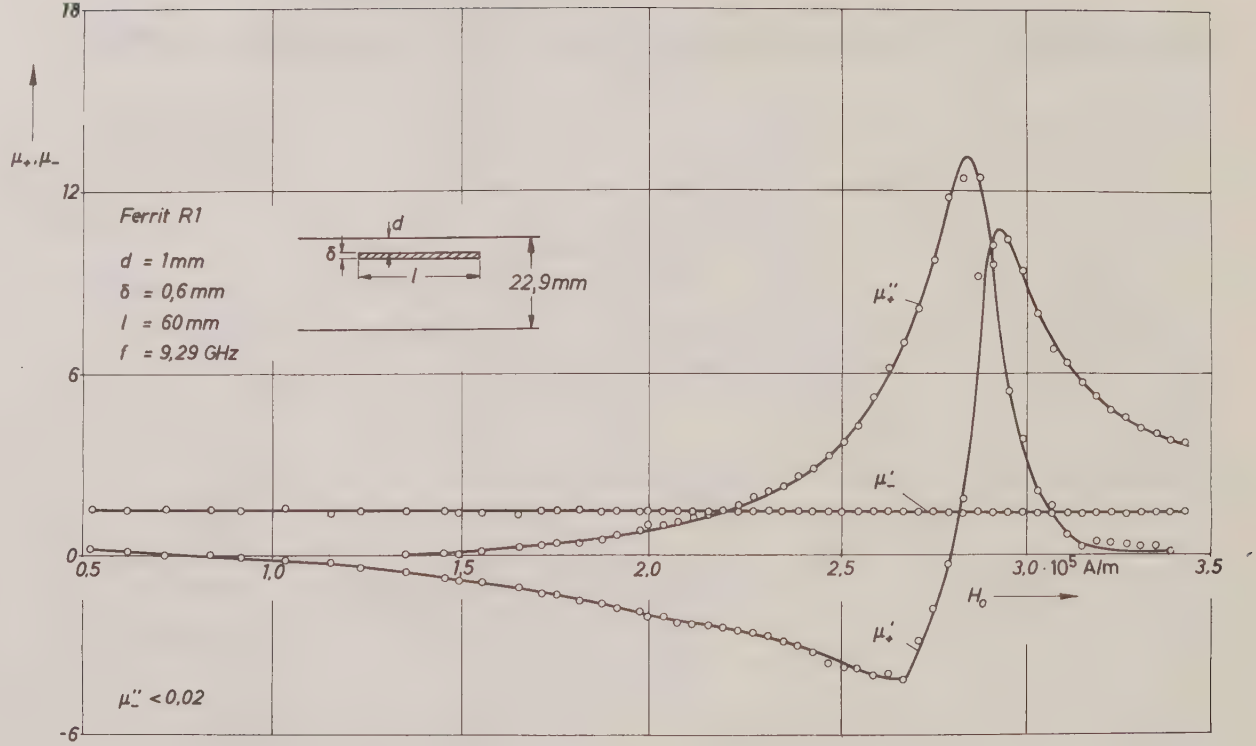


Abb. 27: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

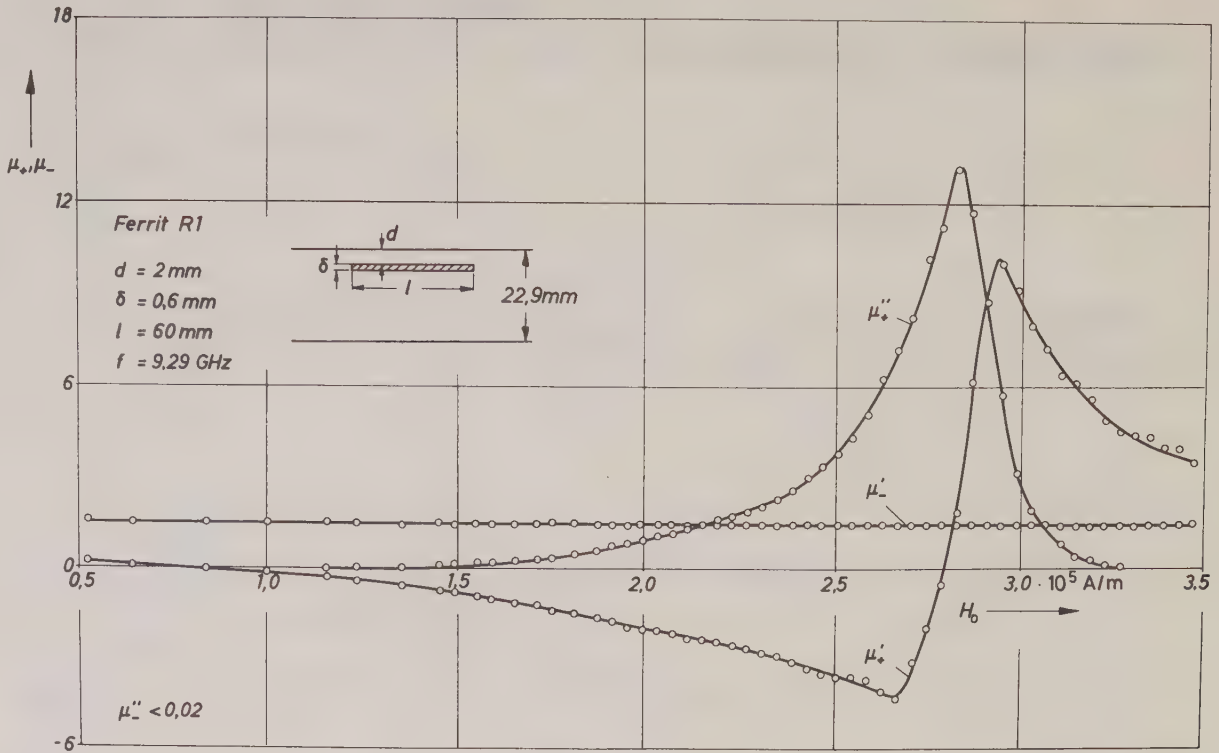


Abb. 28: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

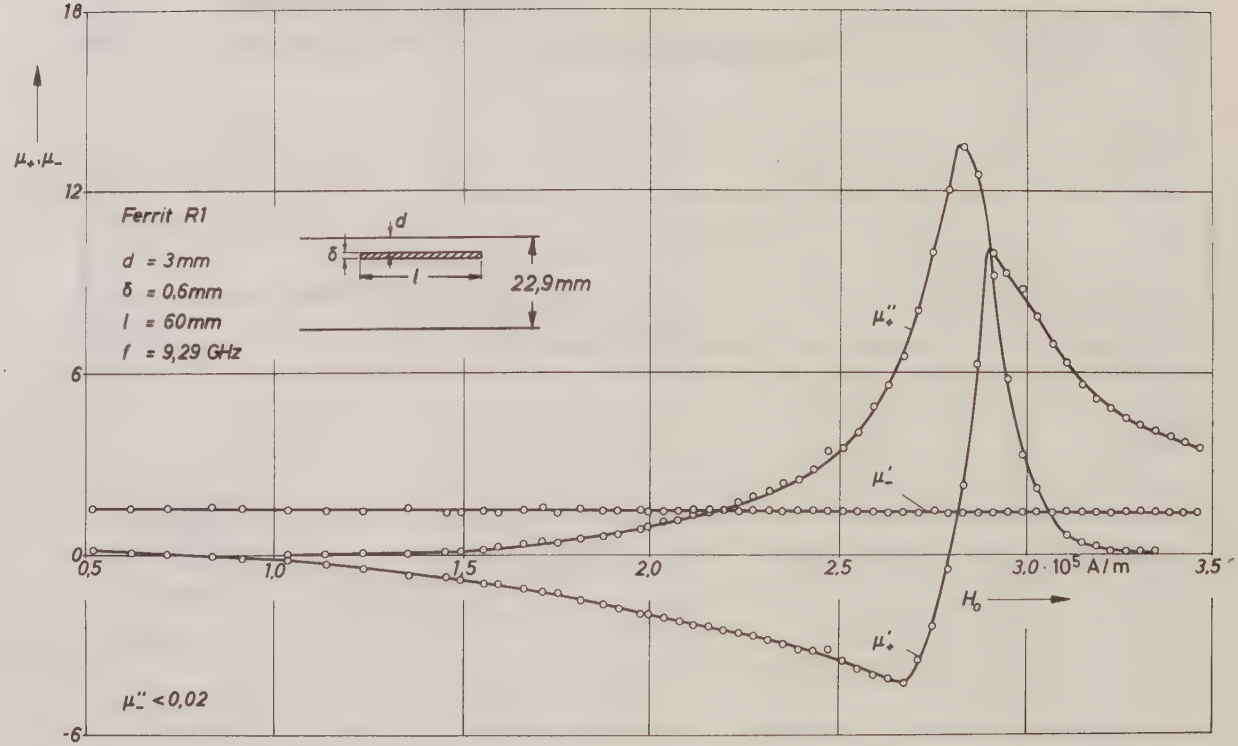


Abb. 29: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

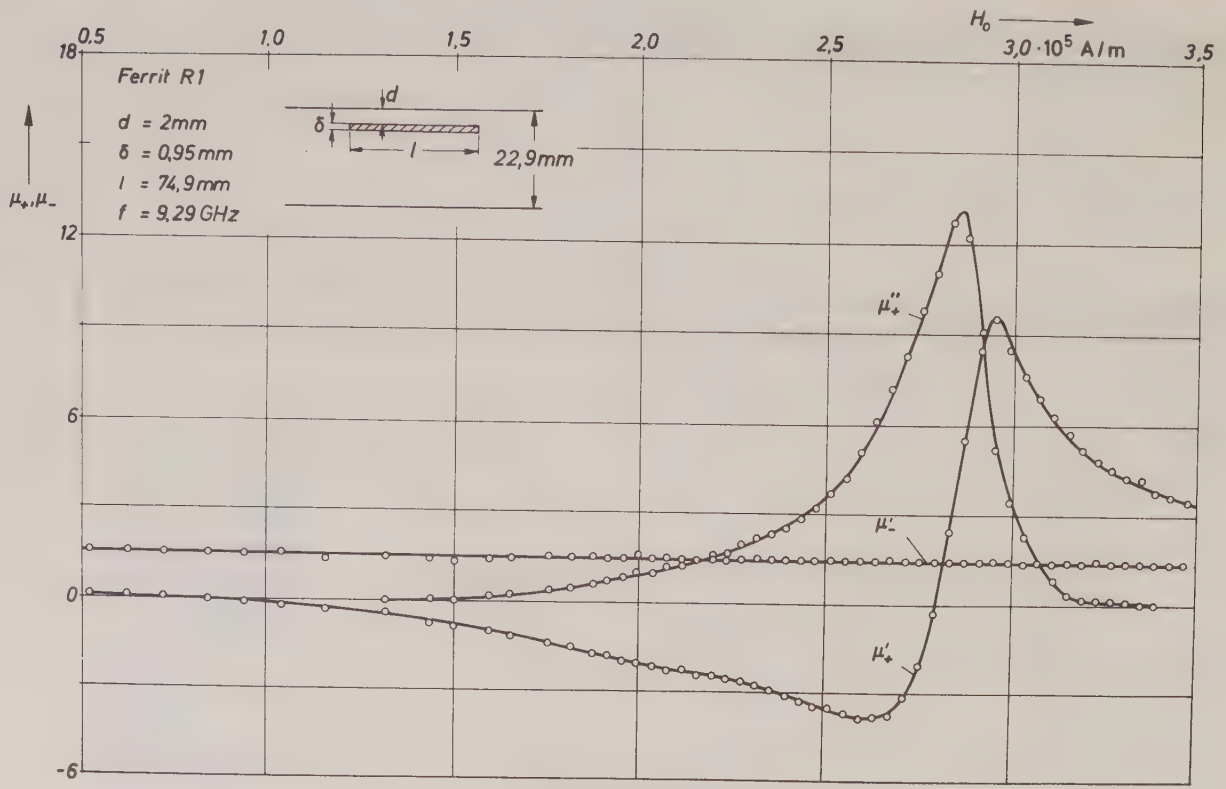


Abb. 30: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

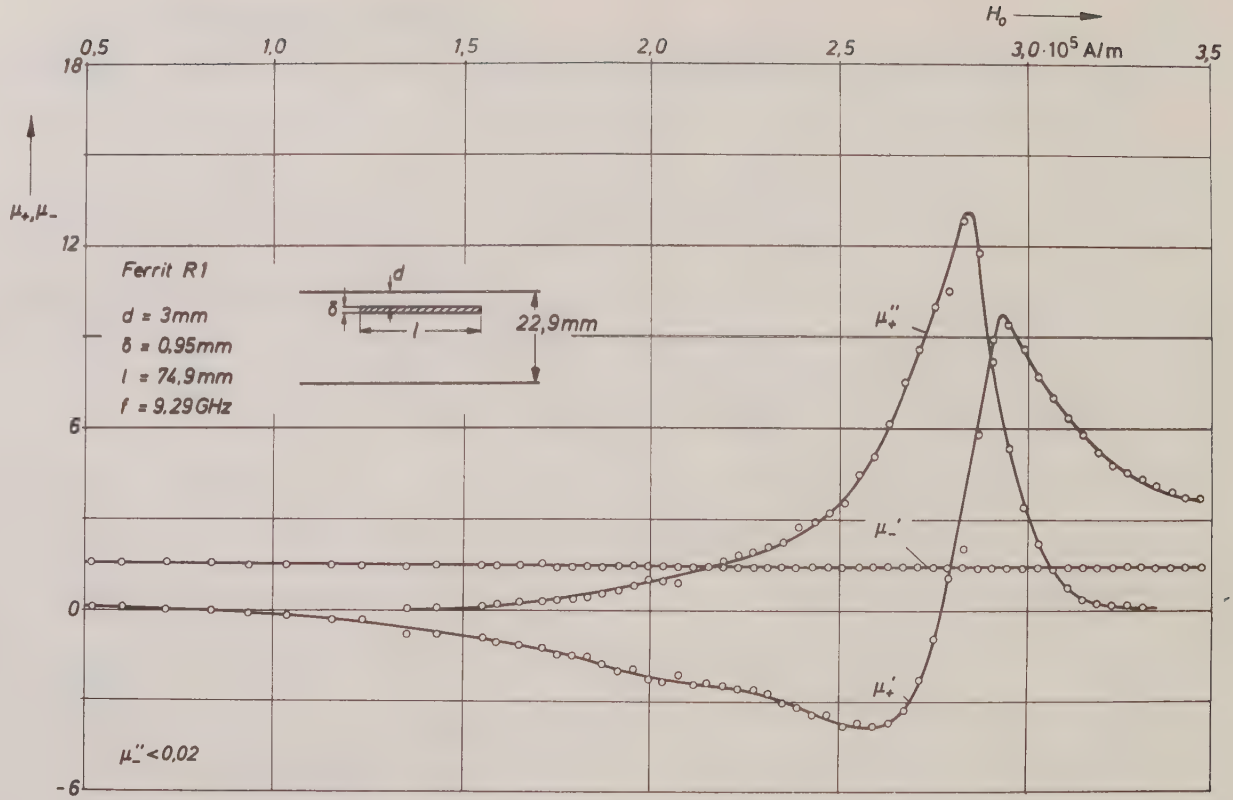


Abb. 31 : Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit vom magnetischen Gleichfeld

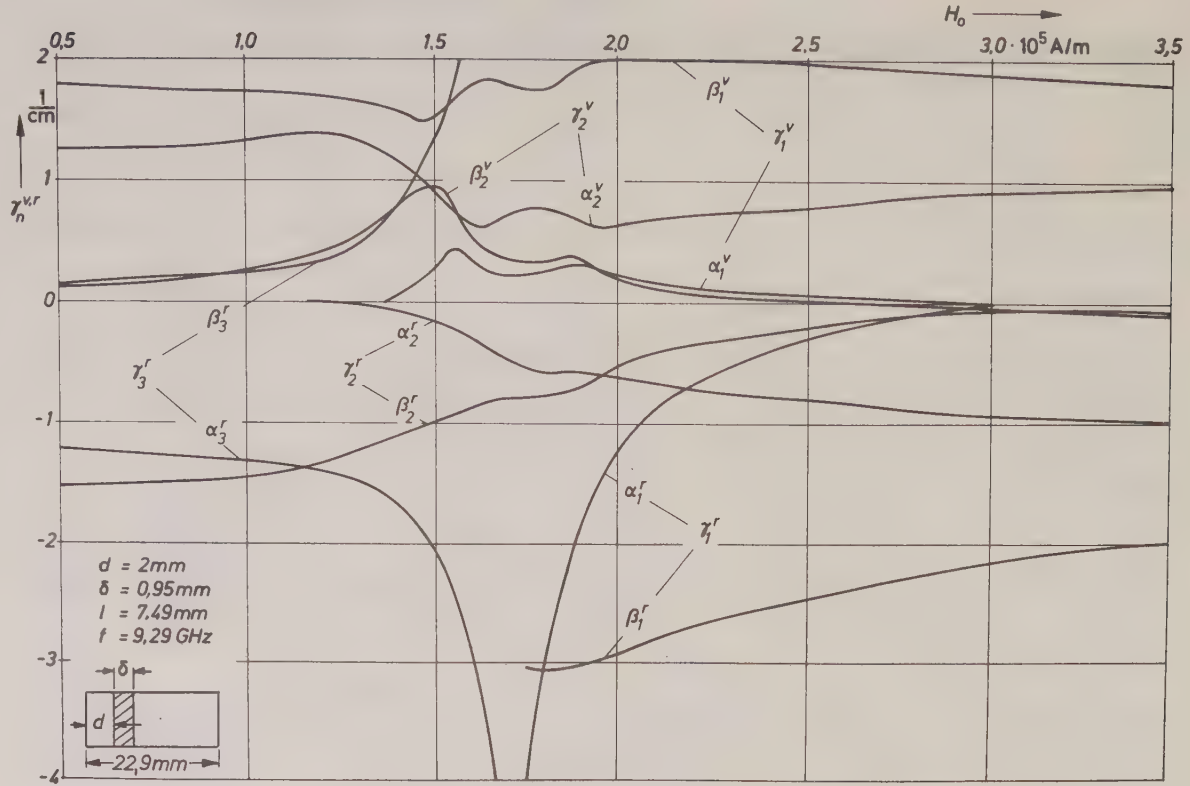


Abb. 32: Feldabhängigkeit der Ausbreitungskonstanten $\gamma_n^{r,v} = \alpha_n^{r,v} + j\beta_n^{r,v}$

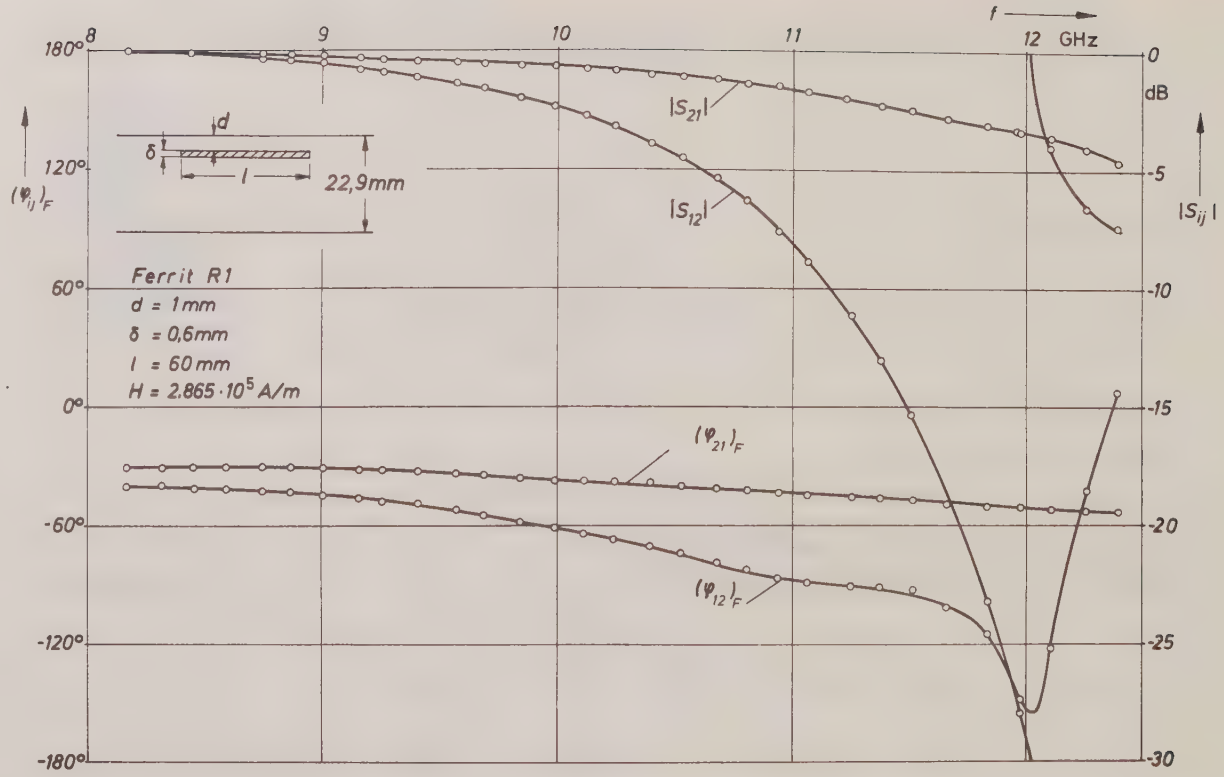


Abb. 33: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit von der Frequenz

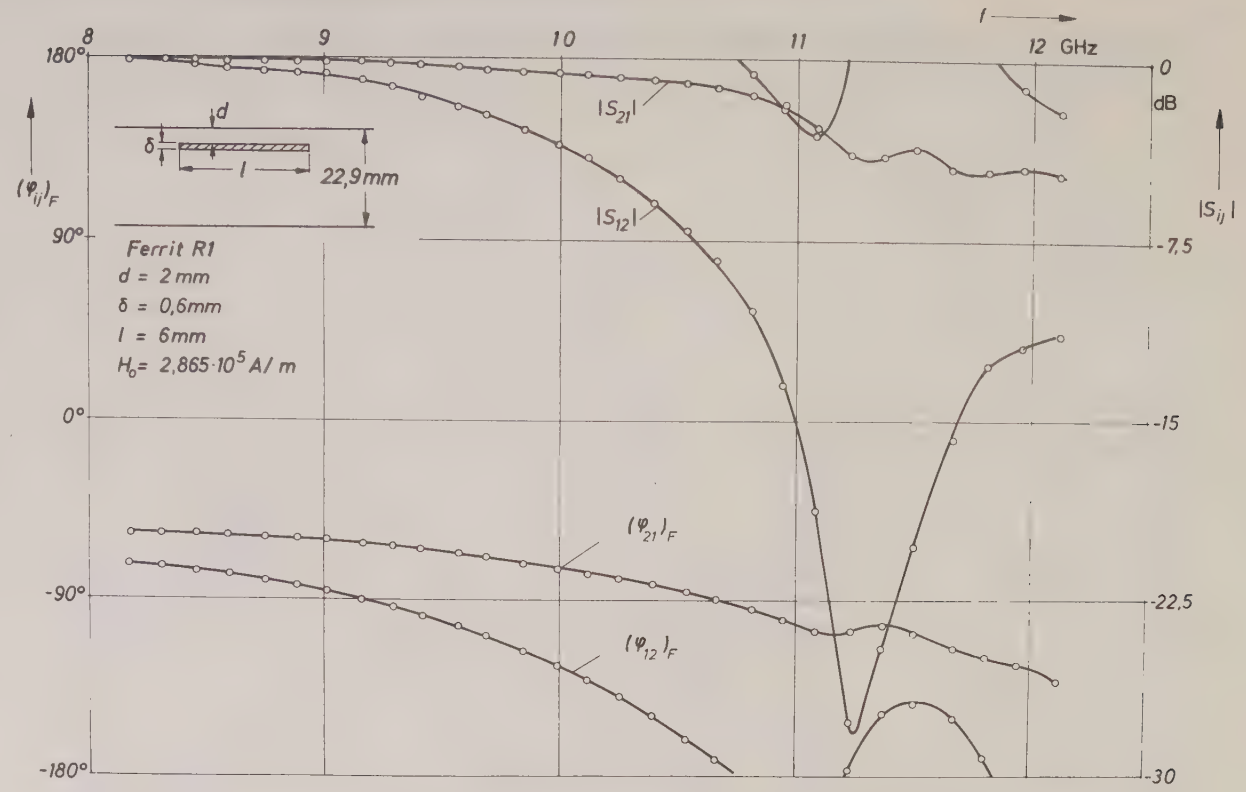


Abb. 34: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit von der Frequenz

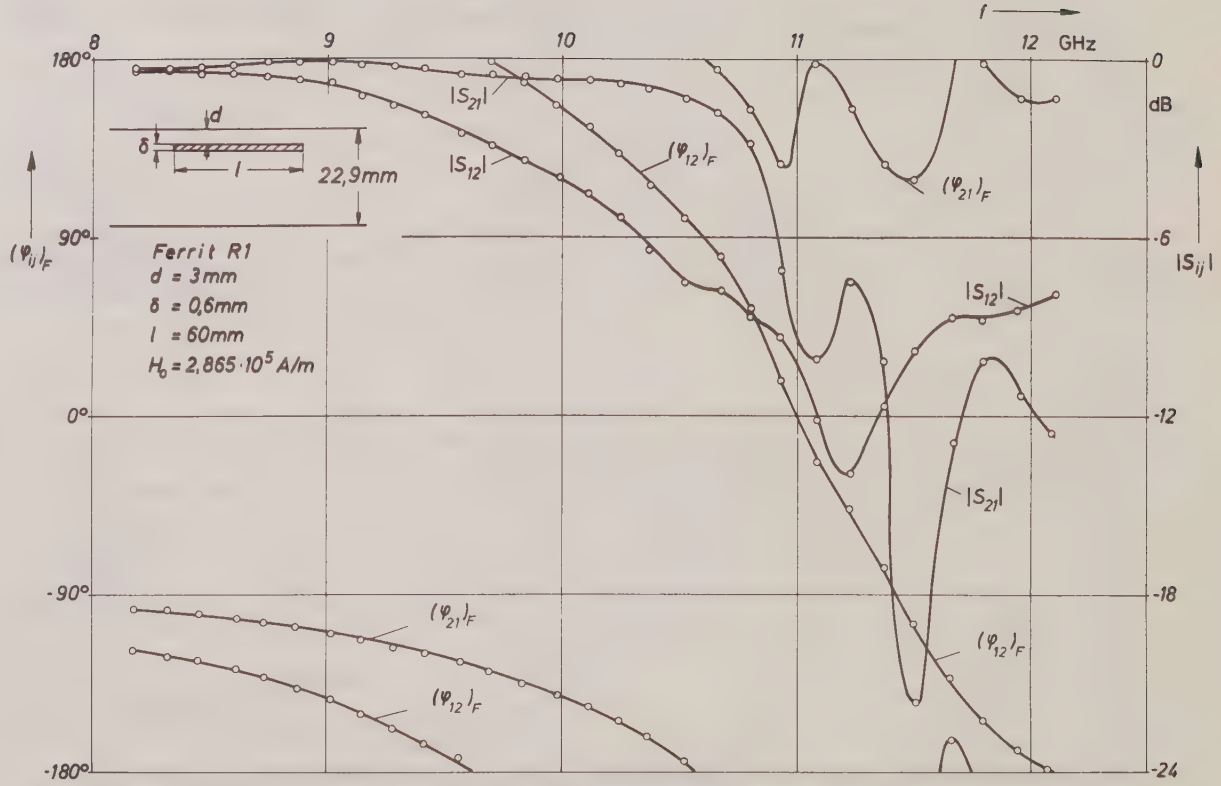


Abb. 35 Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit von der Frequenz

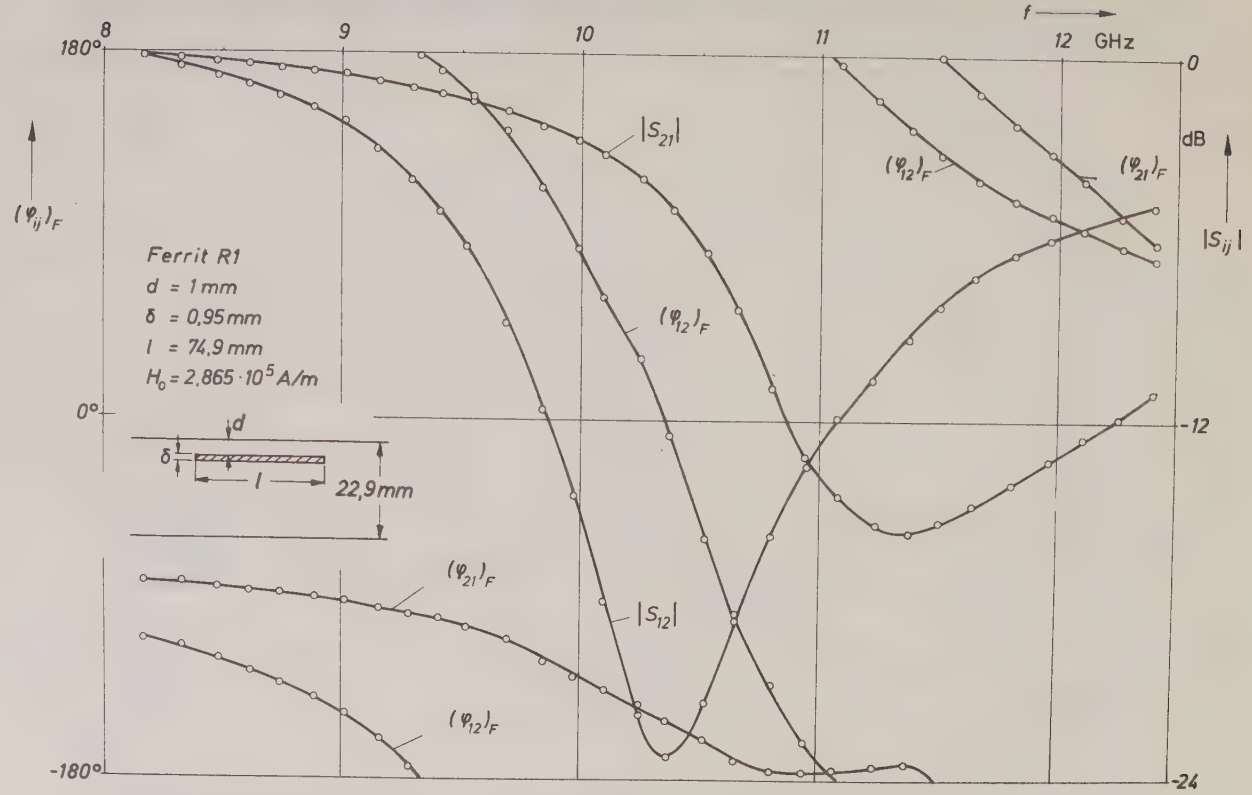


Abb. 36: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit von der Frequenz

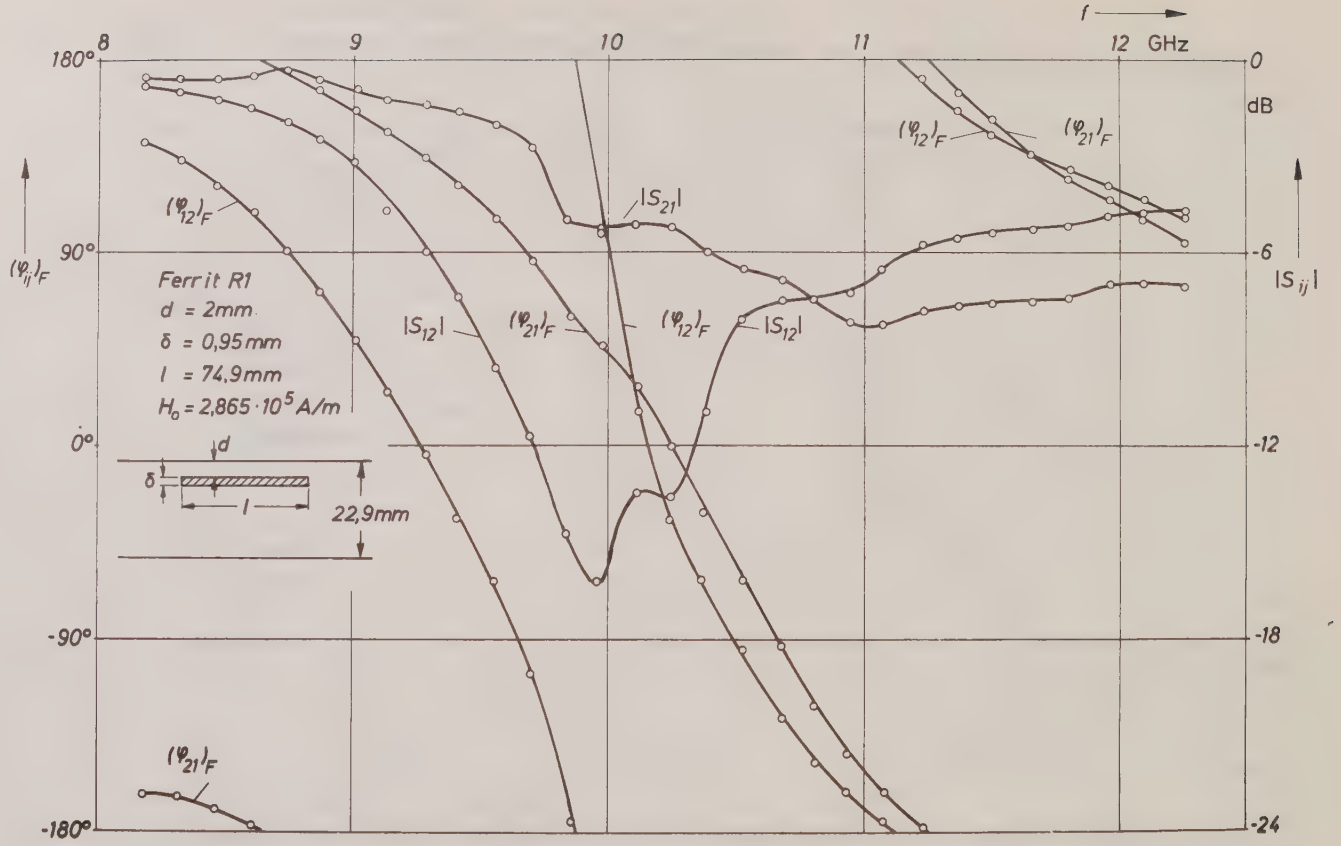


Abb. 37: Messung der Übertragungsfaktoren einer ferritbelasteten Hohlleitung in Abhängigkeit von der Frequenz

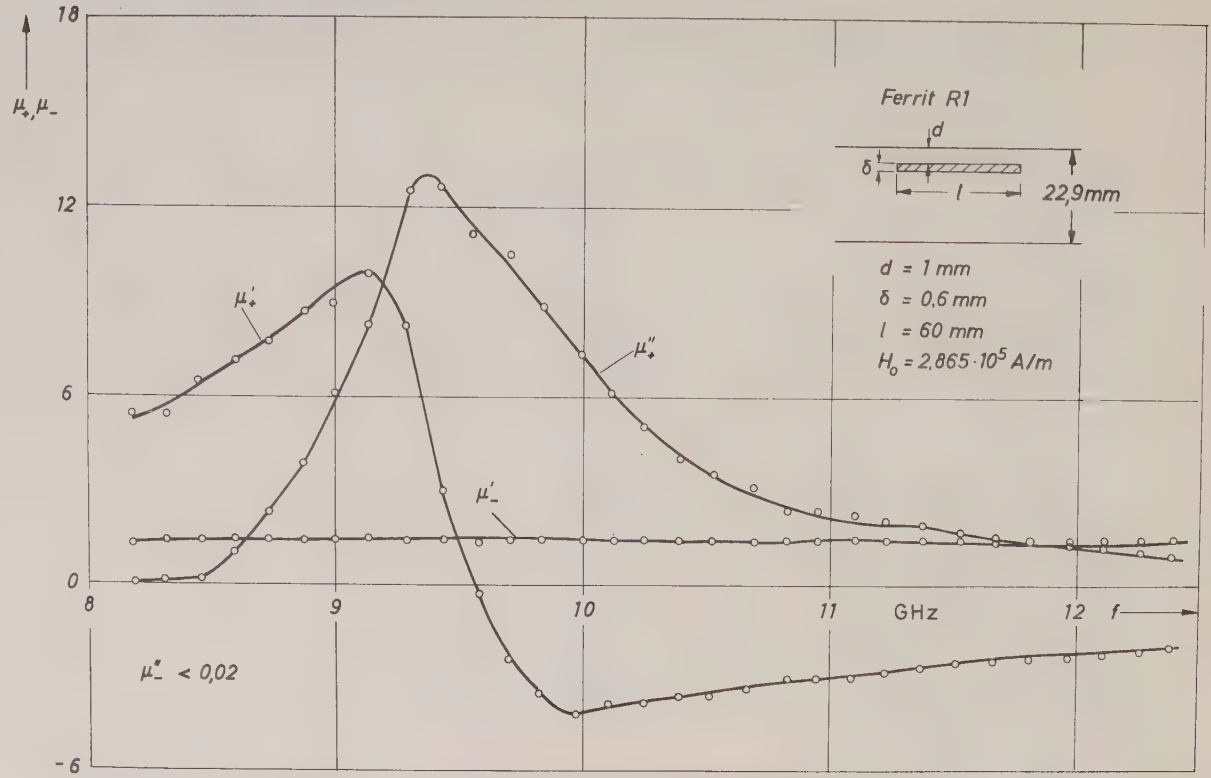


Abb. 38: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit von der Frequenz

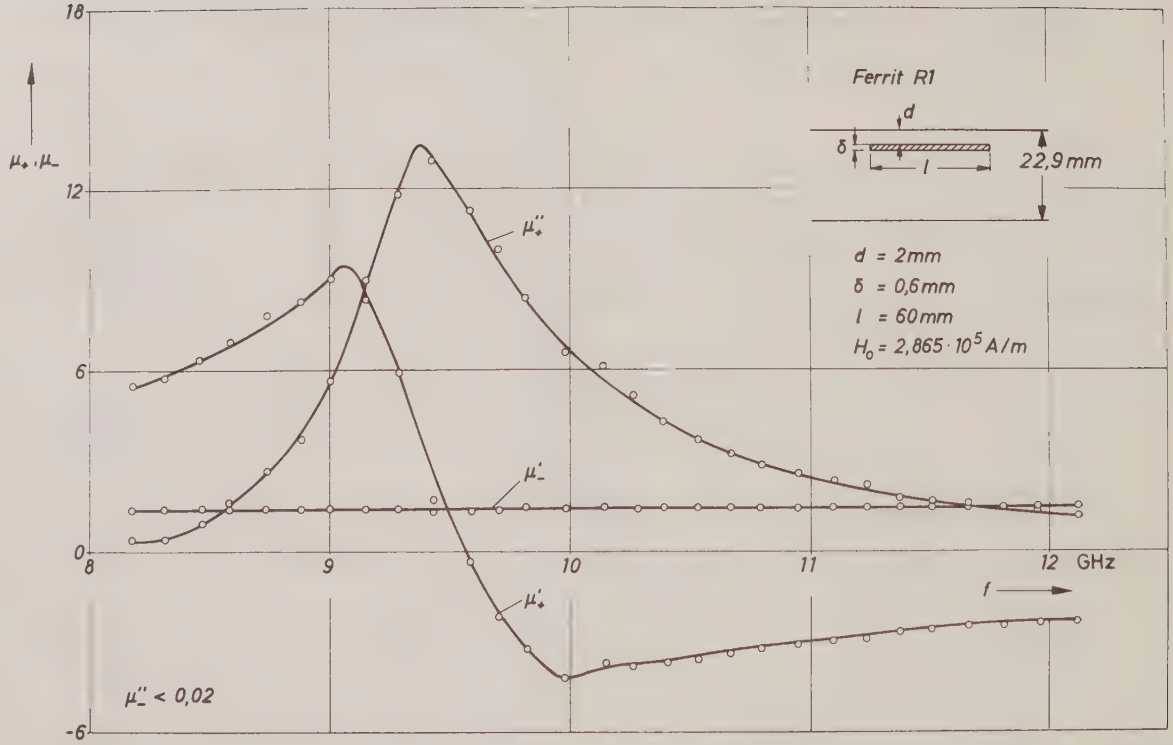


Abb. 39: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit von der Frequenz

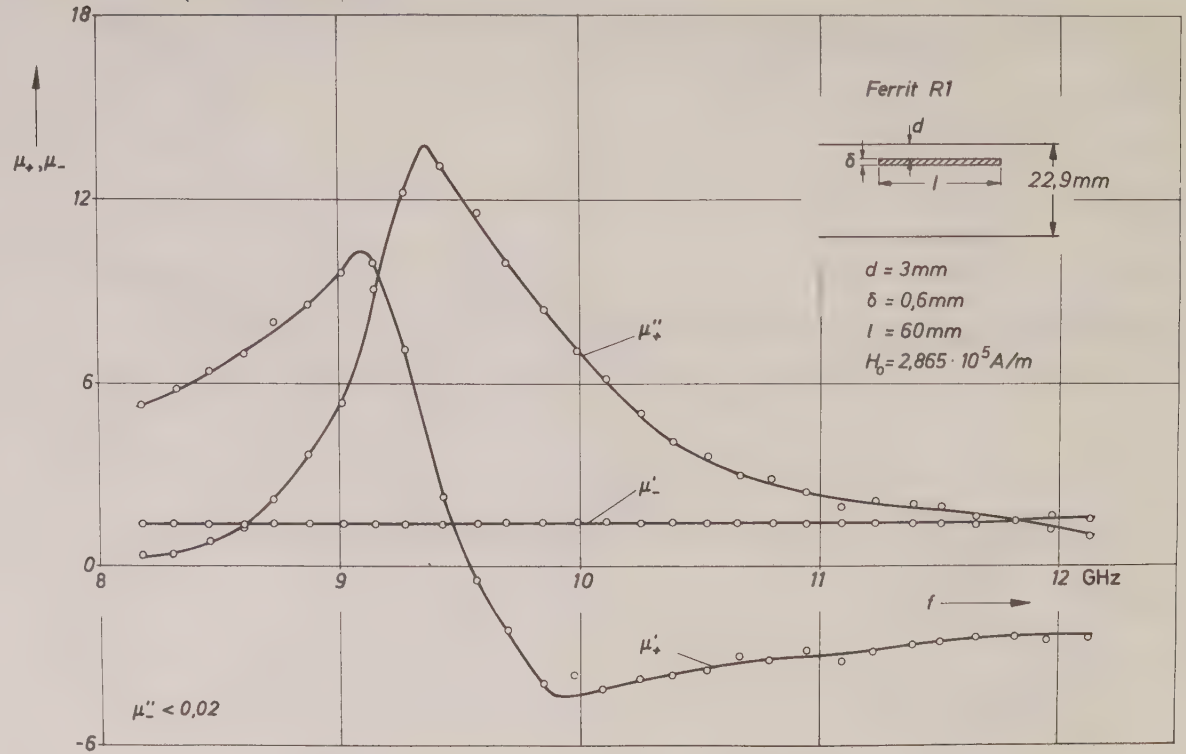


Abb. 40: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit von der Frequenz

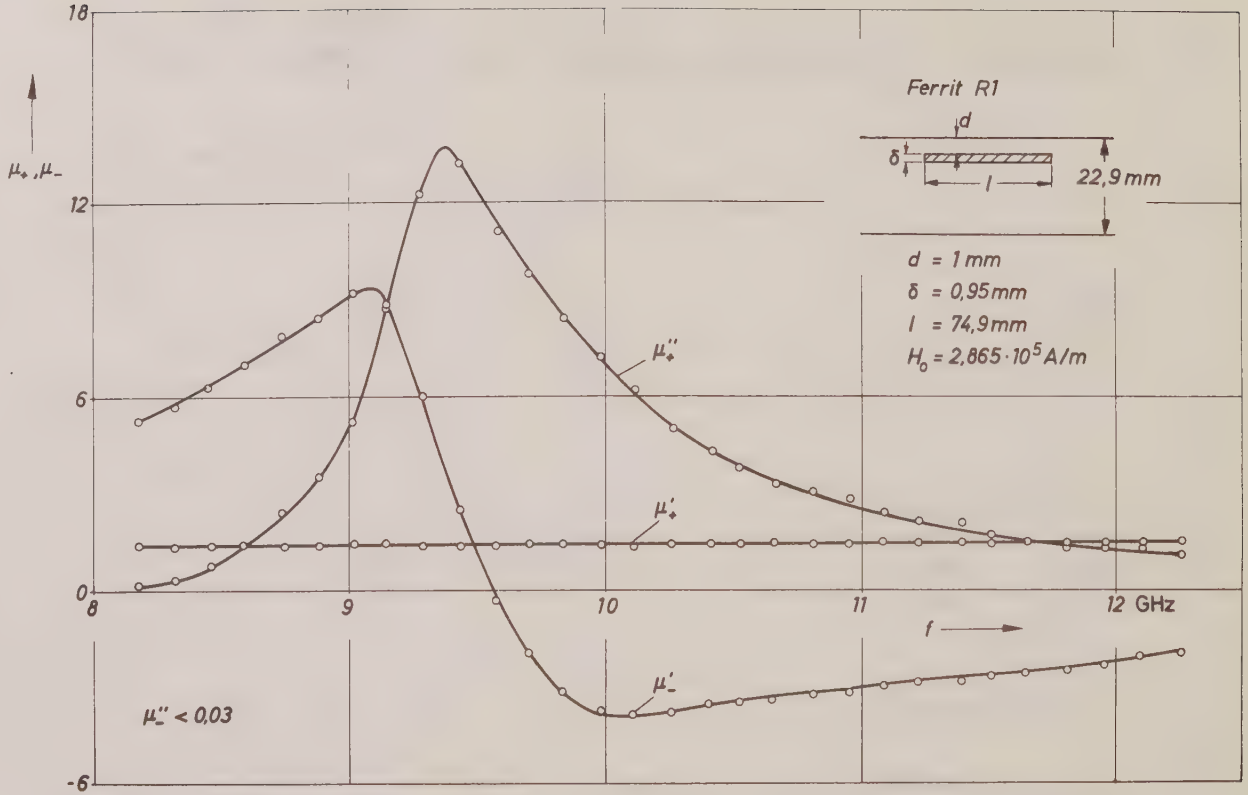


Abb. 41: Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit von der Frequenz

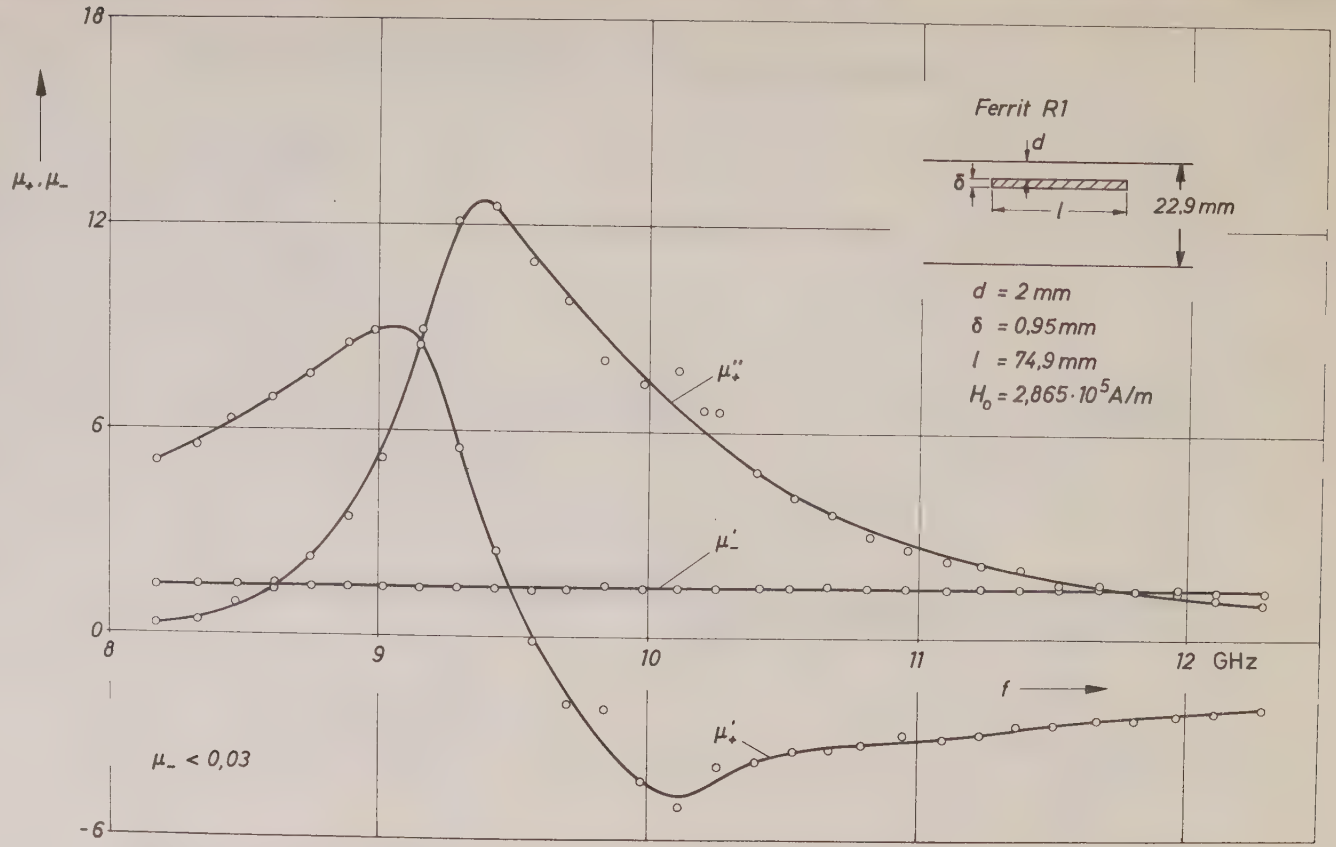


Abb. 42 Eigenwerte μ_+ und μ_- des Permeabilitätstensors in Abhängigkeit von der Frequenz

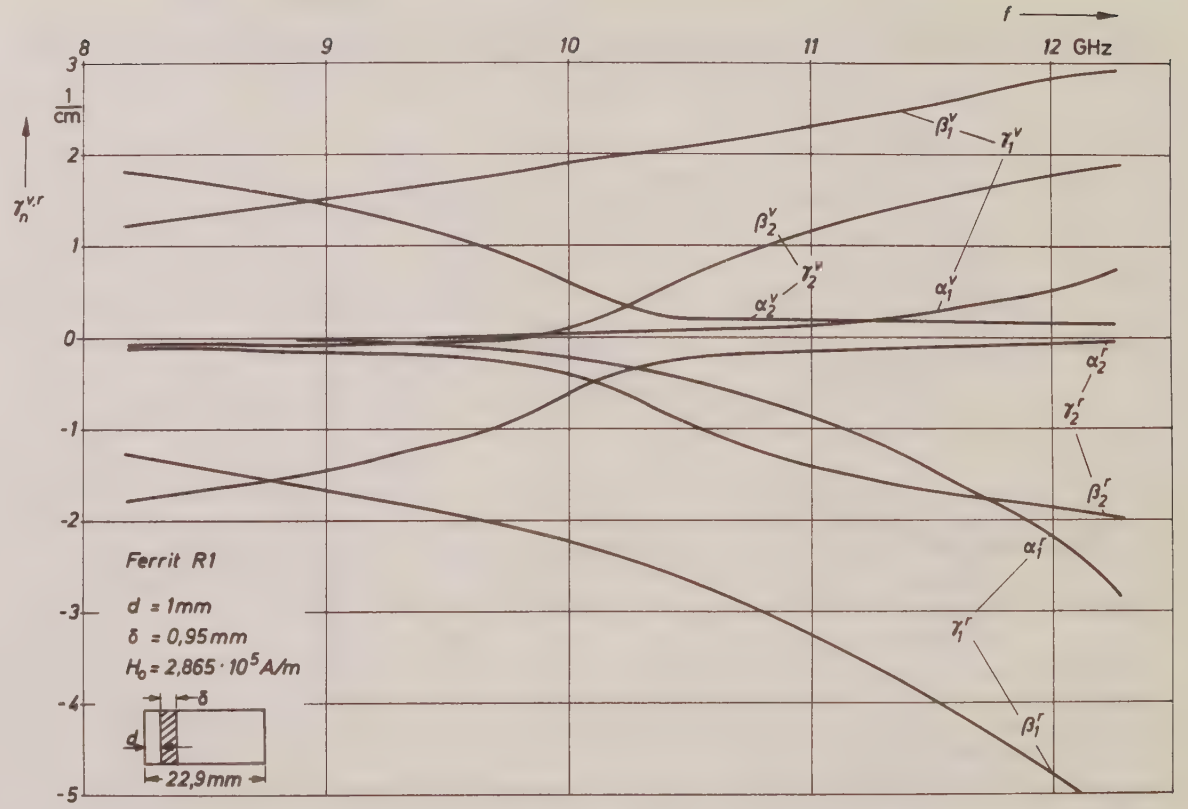


Abb. 43: Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungskonstanten $\gamma_n^{v,r} = \alpha_n^{v,r} + j\beta_n^{v,r}$

Lebenslauf des Verfassers

1943	geboren am 19. September in Belgard
September 1950 bis März 1954	Volksschulen in Blankenburg und Koblenz
April 1954 bis März 1963	Neusprachliches Gymnasium in Koblenz
2. März 1963	Abitur
April bis September 1963	Industriepraktikum
WS 1963/64 bis WS 1068/69	Studium der Elektrotechnik, Fachrichtung Nachrichtentechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt
8. Dezember 1965	Diplomvorprüfung
7. März 1969	Diplomhauptprüfung
Seit dem 1. Juni 1969	Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik (Prof. Dr. Hans Severin)

Bamberger Fotodruck
GmbH & Co. KG.
Schadel & Wehle
86 Bamberg · Hohe-Kreuz-Str. 9b · Telefon: 0951/21617